CURS 3

OSCILAȚII

3.1 Oscilații amortizate

Un sistem real aflat în mişcarea oscilatorie întâmpină o anumită rezistență din partea mediului în care oscilează ⇒ efectuează ***oscilații amortizate*** = amplitudinea lor scade până la dispariție o data cu trecerea timpului. Ele sunt determinate de *acțiunea simultană a forței elastice şi a forței de frecare.*

Fig.3.1 prezintă un oscilator care execută o oscilații amortizate sub acțiunea forței elastice $F_e = -kx$ şi a forței de frecare cu mediul $F_{fr} = -\gamma v$ (***k= constanta elastică a resortului*** , ***γ= coeficientul de frecare vâscoasă al mediului***).

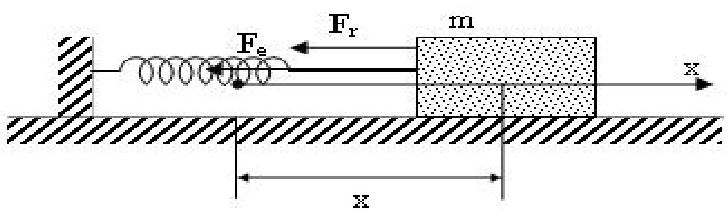

Fig.3.1 Oscilații amortizate.

Ecuația mişcării amortizate este

$$F = F_e + F_{fr} \tag{3.1}$$

adică

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \tag{3.2}$$

sau

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.3}$$

unde $\delta = \dfrac{\gamma}{2m}$ ***- coeficientul de amortizare***

$\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ ***- pătratul frecvenței unghiulare proprii oscilatorului***

Căutăm soluția ecuației (3.3) de forma

$$x = Ce^{\lambda t} \tag{3.4}$$

care, pentru λ imaginar, este o combinație de funcții armonice. Înlocuim (3.4) în (3.3) şi obținem

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \varpi_0^{\ 2} = 0 \tag{3.5}$$

numită ***ecuația caracteristică*** a ecuației diferențiale (3.3). Ea admite soluțiile

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \varpi^2} = -\delta \pm i\sqrt{\varpi_0^{\ 2} - \delta^2} \tag{3.6}$$

Considerăm soluția ecuației (3.3) de forma

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{3.7}$$

care ne conduce la

$$x = e^{-\delta t}(C_1 e^{i\varpi t} + C_2 e^{-i\varpi t}) \tag{3.8}$$

unde

$$\varpi = \sqrt{\varpi_0^{\ 2} - \delta^2} \tag{3.9}$$

care este ***pulsația oscilatorului amortizat***.

<u>Obs.importantă</u>: soluția (3.8) descrie o *mişcare oscilatorie* numai pentru $\varpi_0^{\ 2} - \delta^2 \geq 0$.

(pentru $\varpi_0^{\ 2} - \delta^2 < 0$ descrie o *mişcarea aperiodică amortizată*).

Cu ajutorul formulei lui Euler ($e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$) relația (3.8) se scrie

$$x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\varpi t + \varphi) \tag{3.10}$$

unde

$$A(t) = A_0 e^{-\delta \cdot t} \tag{3.11}$$

unde - ***A(t)= amplitudinea oscilatorului amortizat*** (dependentă de timp)

- **A_0 = amplitudinea inițială a oscilatorului** (la $t = 0 \rightarrow A(0) = A_0$).

Dacă forța de frecare este mică, (3.11) descrie o mişcare periodică cu amplitudine descrescătoare în timp (fig.3.2).

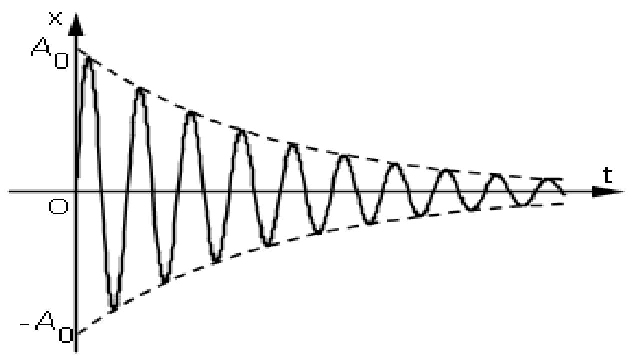

Fig.3.2 Oscilații amortizate.

Când creşte coeficientul de frecare al mediului (γ) $\Rightarrow$ creşte coeficientul de amorizare (δ) $\Rightarrow$ amortizarea devine mai puternică. Rata amortizării este exprimată prin logaritmul natural al raportului $\dfrac{A(t)}{A(t+T)}$, şi se numeşte ***decrementul logaritmic al amortizării***

$$\Delta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T \tag{3.12}$$

Din (3.9) rezultă că amortizarea oscilațiilor modifică perioada acestora

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\gamma^2}{4mk}}} \tag{3.13}$$

unde $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ - ***perioada proprie a oscilatorului***.

Dacă $\vec{F}_f$ creşte $\Rightarrow$ T creşte până când se ajunge la $\dfrac{\gamma^2}{4m} = 1$ unde oscilațiile încetează.

Energia oscilațiilor amortizate este

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^{\ 2} e^{-2\delta \cdot t} = E_0 e^{-2\delta \cdot t} \tag{3.14}$$

unde E_0 = energia inițială. Energia oscilațiilor amortizate scade exponențial în timp.

Funcția de disipație sau ***factorul de calitate*** al unui oscilator amortizat se definește

$$Q = \frac{1}{2}\gamma \cdot v^2 \tag{3.15}$$

Este o mărime adimensională cu proprietățile:

-derivata ei în raport cu viteza este egală cu forța de frecare luată cu semn schimbat

$$F_{fr} = -\frac{dQ}{dv} = -\gamma \cdot v \tag{3.16}$$

-puterea disipată este egală cu dublul funcției de disipație

$$-\frac{dE}{dt} = 2Q = \gamma \cdot v^2 \tag{3.17}$$

Oscilatorul este cu atât mai ”*bun*” (adică va avea un Q mai mare, oscilează un timp mai îndelungat) cu cât δ , respectiv γ , sunt mai mici.

3.2Oscilații forțate

Pentru a întreține oscilațiile care datorită frecării cu mediul se amortizează, se aplică oscilatorului (fig.3.3) o forță periodică externă, $F_p(t)$

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \tag{3.18}$$

unde ***ω = pulsația forței exterioare***

F_0 = valoare maximă a forței exterioare.

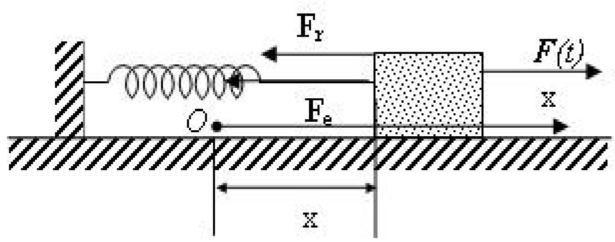

Fig.3.3 Oscilații forțate.

Ecuația de mişcare pentru oscilatorul forțat este

$$F = F_e + F_{fr} + F(t) \tag{3.19}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \tag{3.21}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t \tag{3.22}$$

Ecuația (3.22) reprezintă ***ecuația de mişcare a oscilațiilor forțate*** (***oscilațiilor intreținute***) deoarece acțiunea forței periodice exterioare asupra oscilatorului împiedică „stingerea” oscilațiilor acestuia, cu alte cuvinte „le intreține”.

Soluția căutată pentru ecuație diferențială (3.22) este de forma (3.10). Prin înlocuirea expresiei (3.11) în ecuația de mişcare (3.22) şi prin egalarea coeficienților lui $\sin \omega t$, respectiv $\cos \omega t$, din membrul stâng şi membrul drept al ecuației se obține un sistem de două ecuații a cărui rezolvare conduce la expresiile pentru A şi φ

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \tag{3.23}$$

şi

$$\tan\varphi = -\frac{2\delta\omega}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2} \tag{3.24}$$

Fenomenul de rezonanță *= transferul de energie dinspre sistemul exterior (forța periodică) înspre oscilator se face cu randament maxim, iar energia şi amplitudinea oscilatorului devin maxime.*

Pentru a afla care este pulsația forței exterioare la rezonanță se ține cont ca $E\sim A^2$ (se demonstrează mai târziu) şi se impune condiția $\frac{dA}{d\omega}=0$ de unde

$$\omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \tag{3.25}$$

unde ω_{rez} **= *frecvența de rezonanță*** (se apropie cu atât mai mult de frecvența proprie de oscilație cu cât coeficientul de atenuare, δ, este mai mic).

Fig.3.4 prezintă curbele de variație a amplitudinii pentru diferite valori ale pulsației ϖ şi ale coeficientului de amortizare δ (conform (3.23)). Se observă că la scăderea rezistenței mecanice a mediului în care au loc oscilațiile forțate amplitudinea acestora creşte.

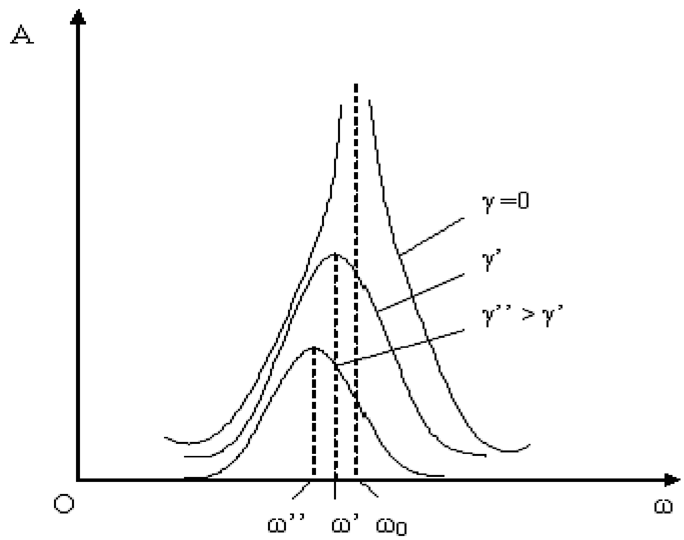

Fig.3.4 Variația amplitudinii în funcție de pulsația ω şi de coeficientul de amortizare δ.

Efectul de rezonanță devine mai accentuat atunci când coeficientului de amortizare δ (respectiv coeficientul de frecare γ) descreşte deoarece A creşte.

La rezonanță, când nu există frecare (γ = 0), amplitudinea oscilatorului tinde spre infinit, iar sistemul se poate distruge $\Rightarrow$ atentie la proiectare în domeniul ingineriei mecanice sau al ingineriei construcțiilor. Pe de altă parte, deoarece la rezonanță transferul de energie dinspre exterior înspre sistemul oscilant se face cu randament maxim, rezonanța este dorită în domeniul electronicii (circuitele oscilante se acordează la rezonanță pentru ca pierderile de semnal să fie minime).

Menționă următoarele proprietăți ale oscilațiilor forțate:

- frecvența oscilațiilor forțate este egală cu frecvența forței externe.
- amplitudinea şi defazajul oscilațiilor forțate depind de structura sistemului mecanic ce oscilează (*k, m*) şi de frecvența a forței externe, şi nu depind de condițiile inițiale.

După începerea acțiunii forței exterioare asupra oscilatorului întreținut urmeză *regimul tranzitoriu* (oscilatorul încă mai oscilează cu frecvența proprie), iar după un timp *regimul permanent* (oscilatorul începe să oscileze cu pulsația forței externe).

UNDE

3.3 Unde mecanice

Undele mecanice *reprezintă fenomenul de propagare a oscilațiilor mecanice într-un mediu elastic.* O perturbație locală produsă într-un mediu elastic se va transmite în toate direcțiile, din aproape în aproape, din cauza forțelor elastice ce se exercită între particulele constitutive ale acelui mediu.

Fenomenul ondulatoriu *nu presupune o deplasare de de materie ci numai una de energie* prin mediul elastic.

<u>Clasificare după tipul de energie transportă:</u>

(i) ***unde elastice*** – transportă energie mecanică; generate de perturbațiile mecanice produse în mediilor elastice;

(ii) ***unde electromagnetice*** – forma de propagare a câmpurilor electromagnetice; fenomenul se produce şi în absența unui mediu elastic (în vid);

(iii) ***unde magneto-hidrodinamice*** – generate prin perturbații electromagnetice şi elastice ale mediului de propagare.

<u>Clasificare în funcție de relația dintre direcția de propagare a undei şi direcția oscilațiilor particulelor mediului elastic:</u>

(i) unde transversale, când oscilațiile particulelor din mediul elastic sunt perpendiculare față de direcția de propagare a undei;

(ii) ***unde longitudinale***, când oscilațiile particulelor din mediul elastic sunt paralele la direcția de propagare a undei.

Front de undă **=** locul geometric al punctelor mediului atinse în acelaşi moment de mişcarea oscilatorie.

<u>Clasificare în functie de forma frontului undei (fig.3.5):</u>

(i) unde plane – frontul undei este plan;

(ii) unde sferice – frontul undei este o suprafață sferică.

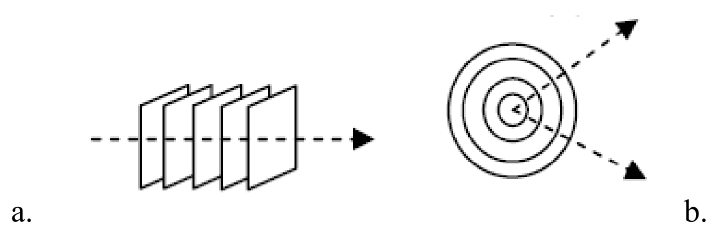

Fig.3.5 a.Undă plană; b.undă sferică.

Câmp de unde= starea in care se afla spațiul din jurul sursei de oscilații străbătut de undele elastice.

3.4 Ecuația undelor

Fie o coardă întinsă de-a lungul axei *Ox* şi o undă transversală ce se propagă prin această coardă. La momentul $t_0 = 0$, în originea axei Ox, forma coardei (fig.3.6a) este afectată de o perturbație descrisă de ecuația

$$\Psi = f(0) \tag{3.26}$$

unde ψ este deplasarea transversală a corzii în poziția $x=0$.

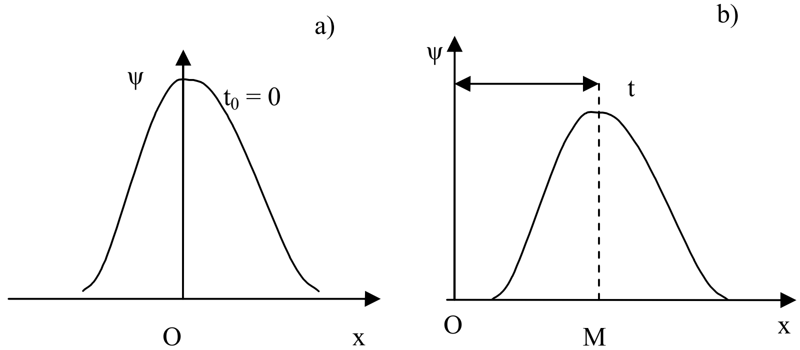

Fig.3.6. Deplasarea undelor

La momentul *t*, ulterior (fig.3.6b), unda s-a deplasat o distanță $x = v \cdot t$ în sensul pozitiv al axei Ox, *v* fiind viteza de propagare a undei. Perturbația produsă de undă la deplasarea sa va fi descrisă pentru momenul *t* de aceeaşi funcție ψ care va avea însă argumentul modificat deoarece în noua poziție perturbația este în întârziere de faz ă față de poziția inițiaă

$$\Psi = f(x + v \cdot t) \tag{3.27}$$

Deci, elongația punctului de la *x* la momentul *t* este aceeaşi cu cea a punctului de la $x = 0$, la momentul $t_0 = 0$, însă defazată în urmă. Relația (3.27) reprezintă ecuația generală a undei pentru cazul deplasării acesteia în sensul pozitiv al axei Ox. Când unda se deplasează în sensul negativ ea devine

$$\Psi = f(x - v \cdot t) \tag{3.28}$$

Să presupunem acum că o sursă *S*, plasată in origine, produce oscilații transversale pe direcția corzii *Ox*, descrise de ecuația

$$\Psi(0,t) = A \sin \omega t \tag{3.29}$$

Un punct M, situat pe coardă la distanța *x* de la sursă, va executa o oscilație identică cu aceea a sursei dar întârziată față de aceasta (datorită intervalului de timp $t^{'}$ necesar udei ca să se deplaseze până în punctul *M*

$$\Psi(x,t) = A \sin \omega (t - t^{'}) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \tag{3.30}$$

unde ω **=** ***pulsația undei*** ($\omega = 2\pi \upsilon = \dfrac{2\pi}{T}$).

Lungimea de undă *distanța parcursă de undă într-un interval de timp egal cu o perioadă*

$$\lambda = v \cdot T \tag{3.31}$$

Numărul de undă - mărime fizică vectorială definită prin relația

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{3.32}$$

Cu ajutorul expresiilor (3.31) şi (3.32) ecuația (3.30) devine

$$\Psi(x,t) = A\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) = A\sin(\omega t - kx)$$
$$\Psi(x,t) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \tag{3.33}$$

Relațiile (3.33) este ***ecuația undelor*** (sub forma integrală).

Fig.3.6 oferă o reprezentare grafică a unei unde şi pune în evidență lungimea de undă a acesteia.

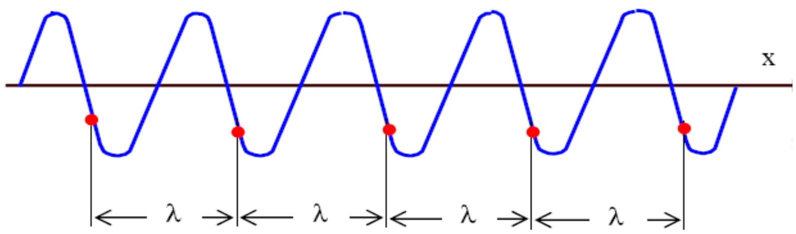

Fig.3.6 Reprezentarea grafică a unei unde.

Dacă faza inițială φ este diferită de zero, atunci ecuația de propagare a undei (3.33) se scrie

$$\Psi(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi) \tag{3.34}$$

Dacă unda se deplasează pe o direcție oarecare $\vec{r}$ ecuația undei devine

$$\Psi(\vec{r},t) = A\sin(\omega t - k\vec{r} + \varphi) \tag{3.35}$$

Utilizând relația (3.33) şi calculând derivatele sale de ordinul doi în raport cu timpul t şi cu variabila de poziție x, rezultă

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{3.36}$$

care reprezintă ***ecuația undelor*** (sub forma diferențială). Pentru o undă ce se deplasează pe o direcție oarecare $\vec{r}$ ecuația (3.34) devine

$$\Delta\Psi == \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \qquad 3.37)$$

unde Δ = operatorul lui Laplace (laplaceanul, definit prin relația (1.23),

v = viteza de propagare a undei.

Christian Huygens a enuntat în anul 1690 ***principiul lui Huygens*** care afirmă că *orice punct de pe frontul de undă poate fi considerat ca sursă a unor unde sferice secundare,iar înfăşurătoarea tuturor undelor elementare constituie noul front de undă.*

Figura 3.7 prezintă schematic principiul lui Huygens.

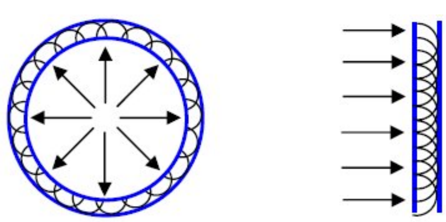

Fig.3.7 Principiul lui Huygens.

3.5. Viteza undelor transversale

Fig.3.8 redă o unda transversală ce se propagă de-a lungul unei corzi elastice cu viteza *v*.

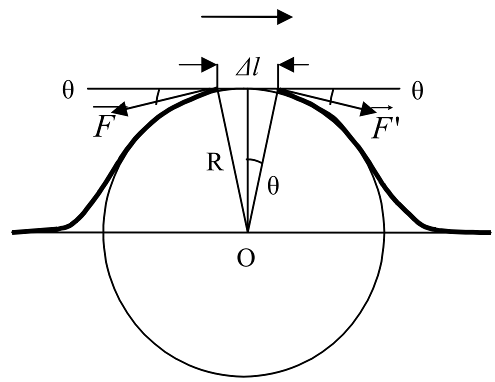

Fig.3.8 Unda transversală ce se propaga printr-o coardă.

Un mic element al corzii (de lungime Δl) formează un arc de cerc cu raza *R*. Dacă μ este densitatea liniară a corzii, atunci $\mu \cdot \Delta l = \Delta m$ reprezintă masa acestui element.

Forțele $\vec{F}$ şi $\vec{F}'$ care acționează asupra elementului de coardă sunt tangente la arcul de cerc în ambele capete ale acestuia. Componentele orizontale ale forțelor se anulează fiind egale şi acționand pe aceeaşi direcție. Componentele transversale la direcția de propagare, egale cu $F\sin\theta$, produc o forță totală pe verticală de $2F\sin\theta$, unde θ este foarte mic şi astfel

$$2F\sin\theta \approx 2F\cdot\theta \approx 2F\frac{\Delta l}{2R} = F\frac{\Delta l}{R} \tag{3.38}$$

Forța de tip centripet ce actioneaza pe elementul de coarda este

$$F\frac{\Delta l}{R} = \frac{\Delta m \cdot v^2}{R} \quad 3.39)$$

de unde

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu}} \tag{3.40}$$

ce reprezintă ***vitezei undei transversale***.