MECANICA

CINEMATICA

Mişcarea unui punct material este determinată atunci când poziția lui este cunoscută în funcție de timp. Prin mişcarea sa punctul material descrie o curbă ce constituie ***traiectoria*** mobilului. Dacă poziția punctului material este determinată față de un punct fix (în general locul unde se află observatorul) mărimea fizică implicată este ***vectorul de poziție***, un vector cu originea în punctul O şi vârful în P unde se găseşte mobilul la momentul respectiv. Dacă ataşăm punctului O un sistem de coordonate Oxyz, ortogonal, atunci putem exprima vectorul de poziție sub forma:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cdot x(t) + \mathbf{j}\cdot y(t) + \mathbf{k}\cdot z(t) \qquad (1)$$

unde coordonatele punctului material sunt funcții de timp, iar **i** ,**j** ,**k** sunt versorii (vectorii unitate) ai celor 3 axe de coordonate.

Viteza mobilului, definită ca raportul între spațiul parcurs şi intervalul de timp în care a fost parcurs acest spațiu, devine la limita unui interval de timp infinit mic, derivata razei vectoare funcție de timp:

$$\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}/dt = \mathbf{i}\cdot v_x + \mathbf{j}\cdot v_y + \mathbf{k}\cdot v_z \qquad [v]_{SI} = m/s \qquad (2)$$

Cunoscând componentele vitezei într-un sistem de coordonate rectangular putem calcula modulul vitezei după relația:

$$|\mathbf{v}| = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2} \qquad (3)$$

datorită faptului că vectorul respectiv este diagonala în paralelipipedul format de cele trei componente.

Similar se poate defini ***accelerația*** mobilului ca raport între variația vitezei şi intervalul de timp în care a avut loc această variație. Ca accelerație instantanee, ea este derivata vitezei funcție de timp:

$$\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt \qquad [a]_{SI} = m/s^2 \qquad (4)$$

Dacă scriem viteza ca un produs între modulul său şi versorul vitezei **b** atunci accelerația va fi:

$$\mathbf{a} = d(v\cdot\mathbf{b})/dt = \mathbf{b}\cdot dv/dt + v\cdot d\mathbf{b}/dt \qquad (5)$$

Primul termen reprezintă accelerația datorată modificării vitezei ca valoare, iar al doilea termen este accelerația datorată modificării direcției vitezei.Ținând cont că **b** este un vector unitate, adică:

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = b^2 = 1 \qquad (6)$$

derivând expresia (6) avem:

$$\mathbf{b}\cdot d\mathbf{b}/dt = 0 \qquad (7)$$

ceea ce ne spune că vectorul d**b**/dt este perpendicular pe vectorul **b**. El va putea fi scris ca:

$$d\mathbf{b}/dt = \mathbf{c}\cdot db/dt \qquad (8)$$

unde **c** este versorul direcției perpendiculare pe direcția lui **b**. Ținând cont că:

$$db = |\mathbf{b}|\cdot d\alpha = d\alpha \qquad (9)$$

unde α este unghiul cu care se roteşte **b**, atunci spațiul parcurs este:

$$ds = R\cdot d\alpha \qquad (10)$$

unde R este raza de curbură a traiectoriei. De aici găsim că:

$$db/dt = d\alpha/dt = (1/R)\cdot(ds/dt) = v/R \qquad (11)$$

iar relația (5) devine:

$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{b}\cdot dv/dt + \mathbf{c}\cdot v^2/R \qquad (12)$$

unde primul termen este accelerația tangențială, iar al doilea termen este accelerația normală (perpendiculară pe direcția de mers).

Cunoscând accelerația unui corp, prin integrare funcție de timp a acesteia obținem viteza sa:

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}\cdot dt \qquad (13)$$

Cunoscând viteza unui corp putem determina legea sa de mişcare (legea spațiului) prin integrarea vitezei după timp:

$$\mathbf{s}(t) = \int \mathbf{v}\cdot dt \qquad (14)$$

Impulsul unui corp este produsul dintre masa corpului şi viteza sa:

$$\mathbf{p} = m\cdot\mathbf{v} \qquad [\mathbf{p}]_{SI} = kg\cdot m/s \qquad (15)$$

DINAMICA

Prima lege a mecanicii sau ***legea inerției*** "Un punct material este în repaus sau se mişcă pe o traiectorie rectilinie cu viteză constantă dacă asupra sa nu acționează alte corpuri din exterior." Această lege se poate enunța cu ajutorul noțiunii de impuls în felul următor: "În absența oricărei forțe, impulsul corpului rămâne constant". Legea inerției este deci o lege de conservare a impulsului.

A doua lege a mecanicii sau ***legea forței*** devine: "Derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu forța ce acționează asupra corpului."

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt \qquad [F]_{SI} = kg\cdot m/s^2 = N \qquad (16)$$

În cazul în care masa este constantă ca funcție de viteză (mecanica clasică) atunci (6) devine:

$$\mathbf{F} = m\cdot\mathbf{a} \qquad (17)$$

A treia lege a mecanicii sau ***legea egalității acțiunilor reciproce*** "Forța cu care acționează un corp A asupra corpului B este egală în modul şi de sens contrar forței cu care acționează corpul B asupra corpului A."

A patra lege a mecanicii sau ***legea superpoziției forțelor*** "Fiecare din forțele aplicate asupra unui corp acționează independent de existența celorlalte forțe."

O consecință importantă a acestei legi este că putem studia mişcarea corpului ca şi cum asupra sa ar acționa o singură forță, forță rezultată prin compunerea tuturor forțelor ce acționează asupra corpului.

Exemple

1. Un corp este acționat de o forță constantă (forța de greutate) G=mg şi o forță de frânare $F_r = kv$ proporțională cu viteza. Găsiți legea vitezei şi a spațiului.

Aplicăm legea forței:

$$ma = mg - kv \quad => \quad dv/dt = g - v\cdot k/m = (k/m)[(mg/k)-v]$$

Separăm variabilele "v" şi "t" şi integrăm:

$$\int dv/[(mg/k)-v]=\int(k/m)\,dt \quad => \quad -\ln[(mg/k)-v] + \ln C = (k/m)\cdot t$$

Punând condiția inițială v = 0 la t = 0, avem $\ln C = \ln(mg/k)$ de unde:

$$\ln\{[(mg/k)-v]/(mg/k)\} = -t(k/m)$$

sau exponențiind avem:

$$[(mg/k)-v]/(mg/k) = e^{-tk/m} \qquad v(t) = (mg/k)(1-e^{-tk/m})$$

Notând $v' = mg/k$ şi $\tau=m/k$ relația vitezei devine:

$$v(t) = v'\cdot(1-e^{-t/\tau})$$

Ştiind că:

$e^{-1} = 0{,}3678$; $1-e^{-1} = 0{,}632= 63\%$
$e^{-2} = 0{,}135$; $1-e^{-2} = 0{,}864= 86\ \%$
$e^{-3} = 0{,}0498$; $1-e^{-3} = 0{,}950= 95\ \%$
$e^{-4} = 0{,}018$; $1-e^{-4} = 0{,}982= 98\ \%$

tragem concluzia că după 3 constante de timp τ, mobilul atinge practic viteza sa limită v', mişcându-se în continuare uniform.

Frânarea proporțională cu viteza este caracteristică mişcării corpurilor cu viteză mică în fluide vâscoase. Forța de frânare a unei sfere de rază r şi densitate ρ, care se mişcă cu viteza v, într-un fluid de densitate ρ' şi coeficient de vâscozitate η ($[\eta]_{SI} = kg/(s\cdot m)$) este :

$$f = 6\cdot\pi\cdot\eta\cdot r\cdot v \qquad \text{(legea lui Stokes)}$$

La limită, când sfera se mişcă uniform sub acțiunea forței de greutate, a forței arhimedice orientată în sens contrar greutății şi a forței de frânare, avem egalitatea:

$$6\cdot\pi\cdot\eta\cdot r\cdot v' = (4/3)\cdot\pi\cdot r^3\cdot g\cdot(\rho-\rho')$$

din care putem deduce coeficientul de vâscozitate măsurând viteza limită v'.

2. Un corp este acționat de o forță constantă (forța de greutate) G = mg şi o forță de frânare $F_r = kv^2$ proporțională cu pătratul vitezei. Găsiți legea vitezei şi a spațiului.

Aplicăm legea forței:

$$ma = mg - kv^2 \quad => \quad a\cdot(m/k) = (mg/k)-v^2$$

Notăm $mg/k = v'^2$, viteza maximă a corpului când a=0, de unde:

$$(dv/dt)\,(m/k) = v'^2-v^2 = (v'-v)(v' + v)$$

Separăm variabilele v şi t: => $dv/[(v'-v)(v' + v)] = (k/m)\cdot dt$

şi ținând cont că :=> $1/[(v'-v)(v'+v)]=(1/2v')[1/(v'-v)+1/(v'+v)]$

putem scrie că : => $dv/(v'-v) + dv/(v' +v) = dt\,(2v'k/m)$

Notând $\tau = m/(2v'k) = (1/2)\cdot[m/(k\cdot g)]^{1/2}$ avem:

$$\int dv/(v'-v) + \int dv/(v' + v) = \int dt/\tau$$

După integrare cu condiția inițială v = 0 la t = 0, avem:

$$\ln[(v' + v)/(v'-v)] = t/\tau$$

de unde exponențiind avem: => $(v' + v)/(v' - v) = e^{t/\tau}$

Rearanjând obținem: => $v(t) = v'\,(e^{t/\tau}-1)/(e^{t/\tau} + 1)$

sau după amplificare cu $e^{-t/\tau}$ => $v(t) = v'\cdot(1-e^{-t/\tau})/(1+e^{-t/\tau})$

relație similară cu cea de la problema anterioară, implicit comportarea mobilului va avea similitudini cu mişcarea sub acțiunea frânării proporționale cu viteza.

Ştiind că:

$e^{-1} = 0{,}368$; $1-e^{-1} = 0{,}632= 63\%$; $1+ e^{-1} = 1{,}3678$
$e^{-2} = 0{,}135$; $1-e^{-2} = 0{,}864= 86\%$; $1+ e^{-2} = 1{,}135$
$e^{-3} = 0{,}049$; $1-e^{-3} = 0{,}950= 95\%$; $1+ e^{-3} = 1{,}049$
$e^{-4} = 0{,}018$; $1-e^{-4} = 0{,}982= 98\%$; $1+ e^{-4} = 1{,}018$

similar cu problema precedentă tragem concluzia că după 3 constante de timp τ, mobilul atinge practic viteza sa limită v', mişcându-se în continuare uniform.

Acestă forţă de frânare este caracteristică mişcării obiectelor cu viteză mare într-un fluid, de exemplu autovehiculele în aer. Presiunea dinamică ce acţionează asupra secţiunii mobilului, transversale pe direcţia de curgere a fluidului:

$$p_{din} = \rho \cdot v^2/2$$

unde: ρ –densitatea fluidului, 1,29 kg/m^3 pentru aer,
v –viteza relativă fluid-solid,
S –secţiunea mobilului

crează forţa de frânare:

$$F_r = K \cdot S \cdot \rho \cdot v^2/2$$

unde K este *coeficientul aerodinamic* ce depinde de forma obiectului:

K = 1,2	=>)	semisferă concavă
K = 1	=> |	plan
K = 0,4	=> O	sferă
K = 0,3	=> (	semisferă convexă
K = 0,2	=> <⊂	"glonţ"
K = 0,04	=> ⊂>	"picătură", profilul aripei de avion

Lucrul mecanic elementar este produsul scalar între forţă şi deplasarea elementară a punctului de aplicaţie a forţei:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cdot ds \cdot \cos\alpha \qquad [L]_{SI} = N \cdot m = J \qquad (18)$$

Lucrul mecanic total este integrala forţei pe traiectoria descrisă de punctul material :

$$L = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad (19)$$

Puterea este raportul dintre lucrul mecanic efectuat şi intervalul de timp în care a fost efectuat. La limita intervalelor de timp foarte mici puterea instantanee este derivata lucrului mecanic:

$$P = dL/dt \qquad [P]_{SI} = J/s = W \qquad (20)$$

Folosindu-ne de relaţia (18) şi de legea forţei (17) putem scrie:

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = m \cdot (d\mathbf{v}/dt) \cdot d\mathbf{r} = m \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = d(mv^2/2) \qquad (21)$$

care prin integrare devine ***teorema variaţiei energiei cinetice*** prin relaţia:

$$L = \Delta E_C = mv_2^2/2 - mv_1^2/2 \; [E_C = mv^2/2] \qquad (22)$$

Exemple

1. Automobilul se mişcă fără frecare sub acţiunea motorului care furnizează putere constantă P. Găsiţi legea vitezei.

$$mv^2/2 - 0 = P \cdot t \qquad => \qquad v = (2Pt/m)^{1/2} \; .$$

2. Acţionează în plus o forţă rezistentă F_r constantă. Ştiind că $P = F \cdot v$, legea forţei devine:

$$m \cdot dv/dt = (P/v) - F_r \qquad => \qquad (m/F_r) \cdot v \cdot dv/[(P/F_r) - v] = dt$$

$$=> \qquad (m/F_r)[-1 + (P/F_r)/(-v + P/F_r)] \cdot dv = dt$$

Integrând avem $\qquad t = (m/F_r)\{-v - (P/F_r) \ln[(-v + P/F_r)/(P/F_r)]\}$

=>***Nu există formulă explicită*** pentru v(t)!

Din ecuaţia iniţială pentru forţă vedem că acceleraţia scade cu creşterea vitezei, anulându-se pentru viteza limită $v' = P/F_r$.

1. Lucrul mecanic al forţei gravitaţionale $F = k \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2$:

$$L = \int (k \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2)\, dr = (k \cdot m_1 \cdot m_2) \int (1/r^2)\, dr$$

$$L = (k \cdot m_1 \cdot m_2) \cdot (-1/r)|_1^2 = (k \cdot m_1 \cdot m_2)/r_1 - (k \cdot m_1 \cdot m_2)/r_2$$

$$V = (km)/r \qquad => \text{potenţial gravitaţional}$$

$$F = -m \cdot dV/d\mathbf{r} = -m \cdot \mathrm{grad}V = -m \cdot \nabla V \qquad => \text{ forţă potenţială.}$$

2. Lucrul mecanic al forţei elastice $F = -k \cdot x$

$$L = \int (-k \cdot x)\, dx = -k \cdot x^2/2| = -k \cdot x_1^2/2 + k \cdot x_2^2/2$$

$$W = -k \cdot x^2/2 \qquad => \text{ energie potenţială elastică}$$

3. Într-un câmp de forţe conservativ lucrul mecanic al forţelor câmpului este egal cu variaţia energiei potenţiale cu semn schimbat:

$$L = -\Delta E_P$$

$$m \cdot g \cdot (h_1 - h_2) = m \cdot g \cdot h_1 - m \cdot g \cdot h_2 = E_{P1} - E_{P2} \; .$$

Dacă acest lucru mecanic se efectuează asupra unui corp, atunci variaţia energiei cinetice va fi:

$$L = \Delta E_C$$

Aceste două relaţii scăzute ne dau:

$$\Delta E_C + \Delta E_P = 0 \qquad \text{care înseamnă:} \qquad E_C + E_P = \text{constant,}$$

adică suma dintre energia cinetică şi potenţială a sistemului rămâne constantă. Aceasta este tocmai ***legea conservării energiei mecanice***.

FLUIDE

Statica fluidelor

Presiunea statică. Presiunea "p" este definită ca forța "F", perpendiculară pe suprafață, divizată cu aria suprafeței "A", sau forță pe suprafața unitate:

$$p = F / A \qquad \text{unitate de măsură } [p]_{SI} = N/m^2 \text{ (Pa, Pascal)} \qquad (1)$$

Măsurarea presiunii este asociată de obicei fluidelor, lichide sau gaze. Datorită greutății lichidului dintr-un recipient în punctul P (figura 1) aflat la adâncimea "h" se crează ***presiunea hidrostatică***:

$$p = G/A = \rho \cdot g \cdot h \cdot A/A = \rho \cdot g \cdot h \qquad (2)$$

unde: h = distanța de la suprafață la punct;
g = accelerația gravitațională (9,81 m/s^2)
ρ = densitate lichid = masa lichidului/volum lichid = m/V (3)

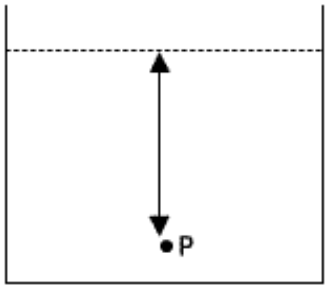


Figura 1. Presiunea în orice punct dat într-un lichid închis este determinată de densitatea lichidului și de distanța de la punctul dat la suprafață.

Astfel densitatea lichidului determină presiunea P exercitată la o adâncime dată. Mercurul, care este de 13,63 ori mai dens decât apa, va exercita o presiune de 13,63 ori mai mare decât apa la același nivel.

Notă! Această relație se poate fi folosi pentru a determina nivelul lichidului dintr-un recipient măsurând presiunea. Înălțimea coloanei de lichid este:

$$h = P / (\rho \cdot g) \qquad (4)$$

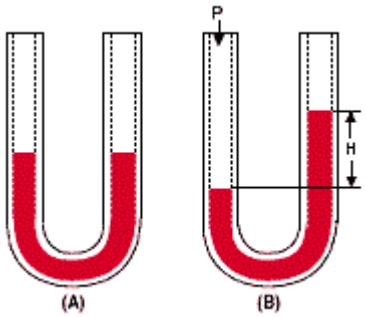
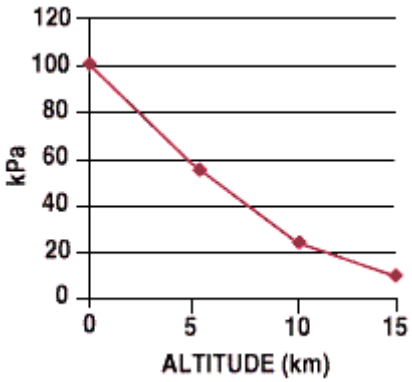


Figura 2. Manometrul cu lichid

Presiunea atmosferică ce acționează pe suprafața lichidului se însumează cu presiunea datorată nivelului coloanei de lichid. Denivelarea coloanei de lichid dintr-un tub în formă de "U" este utilizată pentru măsurarea presiunilor relative (față de presiunea atmosferică) cu manometrul cu lichid folosind relația (2).



Gazele diferă de lichide din două puncte de vedere: sunt foarte compresibile și umplu complet orice vas închis în care sunt plasate.

Variația neliniară cu altitudinea a presiunii aerului, arătată în figura 3 este un exemplu al efectului compresibilității gazelor.

Figura 3a. Compresibilitatea gazelor este ilustrată prin presiunea aerului ca funcție neliniară de altitudine.

Scriem sub formă diferențială relația presiunii hidrostatice (2) pentru aer:

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dh \text{ (semn "–" fiindcă "h" e înălțime, nu adâncime)} \qquad (5)$$

și din ecuația termică de stare a aerului:

$$p \cdot V = R \cdot T \cdot m/M \quad \Rightarrow p = \rho \cdot R \cdot T/M \quad \Rightarrow \rho = p \cdot M / (R \cdot T) \qquad (6)$$

înlocuind densitatea "ρ" în relația (5) găsim modul în care variază presiunea cu înălțimea:

$$dp/p = -dh \cdot M \cdot g/(R \cdot T) \qquad \Rightarrow \ln(p/p_o) = -M \cdot g \cdot h/(R \cdot T) \qquad (7)$$

formula presiuni atmosferice în funcție de altitudine fiind:

$$p = p_o \cdot e^{-M \cdot g \cdot h/(R \cdot T)} \qquad (8)$$

unde: R – constanta universală a gazelor (8310 J/(kmol·K))
T – temperatura gazului în grade Kelvin (T=273+t (°C))
M– masa molară (pentru aer ~ 29 kg/kmol)
p_o– presiunea atmosferică la nivelul mării (h=0, p_o=101 kPa)

Folosind constantele numerice date și o temperatură de 27°C putem calcula mărimea:

$$h' = R \cdot T/(M \cdot g) = 8763 \text{ m}$$

și cu ajutorul ei presiunea atmosferică relativă "p/p_o" ca funcție de altitudine:

$$p/p_o = e^{-h/h'} \qquad (8')$$

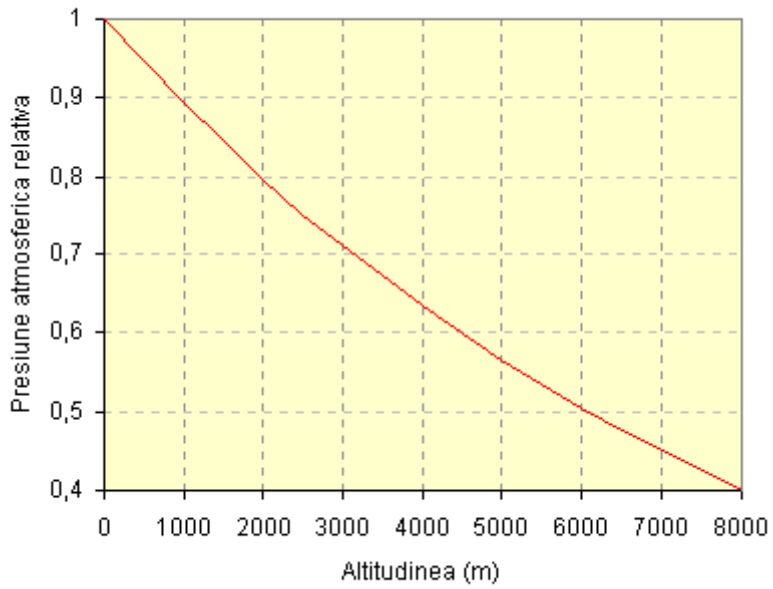


Figura 3b. Presiunea atmosferică relativă în funcție de altitudine calculată cu relația (8)

Atmosfera standard $H(m) = 8000 \cdot \lg (p_o/p)$; $\Delta t = 6{,}5°C/1000m$

Altitudine (m)	p/p_o	ρ/ρ_o	t (°C)
0	1	1	15
1000	0,887	0,907	8,5
2000	0,784	0,822	2
3000	0,692	0,742	–4,5
4000	0,608	0,669	–11
5000	0,533	0,601	–17,5
6000	0,465	0,538	–24
7000	0,405	0,481	–30,5
8000	0,351	0,428	–37
9000	0,303	0,381	–43
10000	0,261	0,337	–50

Potrivit ***principiului lui Arhimede*** "un corp cufundat parțial sau total într-un lichid, este împins în sus de o forță egală cu greutatea lichidului dezlocuit". Pe suprafața de sus a corpului paralelipipedic cu aria bazei A şi înălțimea L, cufundat într-un container cu lichid (figura 4), se exercită o forță descendentă:

$$F_1 = p_{sus} \cdot A = h \cdot \rho \cdot g \cdot A \qquad (9)$$

iar pe suprafața de jos se exercită forța ascendentă:

$$F_2 = p_{jos} \cdot A = (h + L) \cdot \rho \cdot g \cdot A \qquad (10)$$

forța rezultantă:

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho \cdot g \cdot A \cdot L \qquad (11)$$

fiind egală cu greutatea lichidului dezlocuit (volumul corpului înmulțit cu densitatea lichidului şi accelerația gravitațională)

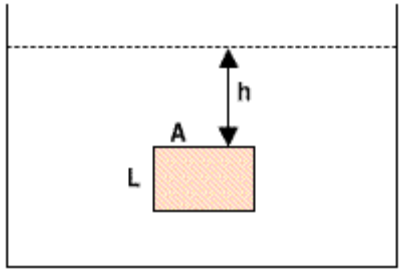


Figura 4. Conform principiului lui Arhimede, un obiect cufundat într-un lichid va fi împins spre suprafață de greutatea lichidului dezlocuit.

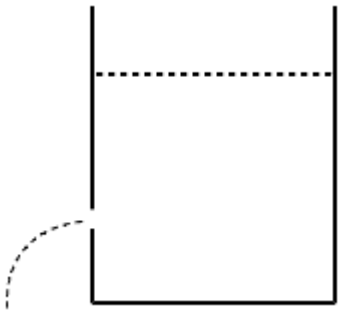


Figura 5. Presiunea lichidului este normală la suprafațăi, după cum se observă în urma perforării vasului.

Fiindcă într-un lichid practic nu apar forțe de forfecare transmiterea presiunii lichidului se face perpendicular pe suprafața vasului în care se află. Fenomenul se demonstrează cu uşurință prin găurirea containerului cu apă şi observând cursul jetului prin orificiu (figura 5). Acest fapt este important în construcția barajelor (digurilor) ce trebuie să reziste forței apei.

Legea lui Pascal prevede că dacă există o creştere a presiunii pe o porțiune din suprafața lichidului, atunci o creştere identică va exista în orice alt punct din acel lichid. Acest principiu este utilizat în cazul sistemelor hidraulice cum ar fi cricurile şi frânele automobilelor. Este echivalentul fluidic al principiului pârghiei, care produce forțe mari folosind deplasări mari cu pistoane mici ce mişcă pistoane mari pe distanțe mici (figura 6).

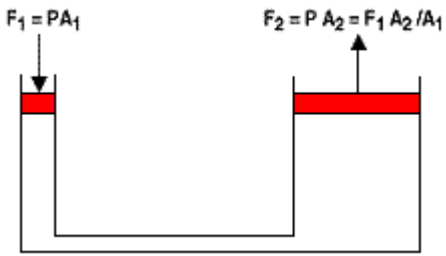


Figura 6. Potrivit legii lui Pascal, o creştere a presiunii pe suprafaţa lichidului determină o creştere similară în orice alt punct din acel lichid.

Dinamica fluidelor

Presiunea fluidelor în mişcare. ***Presiunea dinamică*** (de impact) P_d, datorată energiei cinetice a fluidului, exercitată paralel cu direcţia de curgere este:

$$P_d = \rho \cdot v^2/2 \qquad (12)$$

unde: ρ = densitatea fluidului; v = viteza fluidului.

Conform ***teoremei lui Bernoulli*** (dedusă din conservarea energiei mecanice), pentru curgerile orizontale este valabilă următoarea relaţie:

$$P_t = P_s + P_d \qquad (13)$$

unde: P_t = presiunea totală;
P_s = presiunea statică.

Cu relaţia (13), rearanjată, se determină viteza curgerii unui fluid în multe aplicaţii:

$$v = [2\cdot(P_t - P_s)/\rho]^{1/2} \qquad (14)$$

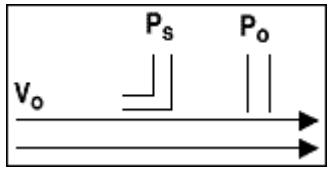


Figura 7. Un ansamblu de tuburi Pitot poate fi folosit pentru măsurarea vitezei fluidului în mişcare.

Tubul orientat spre direcţia de curgere a fluidului măsoară presiunea totală şi tubul vertical măsoară presiunea statică. Această abordare este folosită în aplicaţiile din tehnica vidului şi în aviaţie pentru a măsura viteza de curgere. Din viteza de curgere "v" se poate determina debitul volumic (volumul de fluid ce trece prin secţiunea transversală de arie "S" a unei conducte în unitatea de timp) din relaţia:

$$Q_v = S\cdot v \qquad (15)$$

În cazul fluidelor incompresibile, în primul rând lichidele, dar şi gazele în multe cazuri, ţinând cont de conservarea masei (cât fluid intră pe o parte a conductei, tot atât iese), relaţia (15) aplicată la două secţiuni din conductă devine ***ecuaţia de continuitate***:

$$S_1\cdot v_1 = S_2\cdot v_2 \qquad (16)$$

Efectele dinamice. Presiunea statică este măsurată în condiţii de echilibru sau în condiţii staţionare, dar în aplicaţiile reale apar presiuni variabile în timp, dinamice. De exemplu la măsurarea tensiunii arteriale se obţin două valori staţionare, presiunea sistolică şi diastolică. O mare varietate de informaţii pot fi obţinute din forma semnalului tensiunii arteriale în funcţie de timp. Din acest motiv sunt folosite monitoarele de presiune sanguină în urgenţele medicale.

Pentru a măsura presiuni variabile în timp, trebuie luat în considerare *răspunsul în frecvenţă* al senzorului. Aproximând grosier, răspunsul în frecvenţă al senzorului ar trebui să fie 5 – 10 mai mare decât componenta cu cea mai mare frecvenţă din semnalul presiunii. Răspunsul de frecvenţă este definit ca fiind cea mai mare frecvenţă pe care senzorul o va măsura fără nici o distorsiune sau atenuare. Este util ***timpul de răspuns*** care într-un sistem de ordinul unu se află în următoarea relaţie cu frecvenţa de răspuns:

$$F_B = \pi\cdot\tau/2 \qquad (17)$$

unde:

- F_B = frecvenţa unde răspunsul scade la jumătate (50 %);
- τ = constanta de timp, timpul în care mărimea de ieşire creşte la 63% din valoare ei finală, când i se aplică un semnal treaptă al mărimii de intrare.

Alt aspect se referă la măsurarea de la distanţă a presiunii, unde este utilizat un mediu lichid de legătură. Trebuie avut grijă ca tot aerul să fie evacuat (purjat), deoarece compresibilitatea lui va vicia forma de undă a semnalului.

Tipuri de măsurare a presiunii

- ***Presiunea absolută*** este măsurată faţă de vid. Un exemplu în acest sens îl constituie presiunea atmosferică.
- ***Presiunea diferenţială*** este diferenţa de presiune dintre 2 puncte de măsură.
- ***Presiunea relativă*** este măsurată relativ la presiunea ambiantă. Tensiunea arterială este unul dintre exemple.

Cele 3 tipuri de măsurători sunt ilustrate în figura 8. Acelaşi senzor de presiune se poate utiliza în toate cele 3 moduri, diferind numai presiunea de referinţă. Presiunea diferenţială poate fi măsurată în orice domeniu peste, sub sau în jurul presiunii atmosferice.

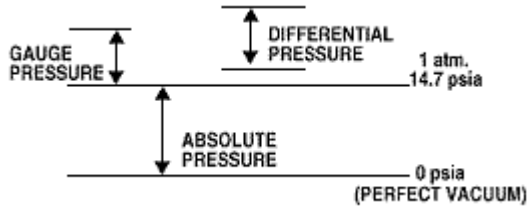


Figura 8. Acelaşi senzor poate fi utilizat pentru toate tipurile de măsurare a presiunii, diferind numai punctul de referinţă.

Unităţi de presiune

Presiunea este forţa pe unitatea de suprafaţă, iar pentru ea s-au folosit multe tipuri de unităţi, după cât de potrivite cu aplicaţia erau. De exemplu tensiunea arterială este de regulă măsurată în mmHg, fiindcă iniţial se utilizau manometrele cu mercur. Din aceleaşi motive presiunea atmosferică se exprimă de obicei în mmHg (=Torr) sau în in.Hg. Alte unităţi de măsură folosite pentru presiunea atmosferică sunt: bar-ul (=at. =atmosfera tehnică) şi atm. (atmosfera fizică). Următoarele transformări (conversii) ar trebui să ajute la înţelegerea diferitelor unităţi:

1 atm = 760 mmHg = 14,696 psi = $1{,}013 \cdot 10^5$ Pa (N/m^2)

1 at = $1 kgf/cm^2$ = 1 bar = 14,504 psi = $0{,}981 \cdot 10^5$ Pa (N/m^2)

1 psi = 51,714 mmHg = 2,0359 in.Hg = 27,680 in. H_2O = 6,8946 kPa

psia – presiunea absolută în livre pe ţol (inci) pătrat (**p***ounds per* **s***quare* **i***nch*).

psid – presiunea diferenţială în psi

psig – presiunea relativă în livre pe ţol pătrat.

Traductoare de presiune

Presiunea este sesizată cu elemente mecanice elastice: plăci, membrane şi tuburi care sunt proiectate şi construite să se deformeze când este aplicată presiunea. Acesta este mecanismul de bază care transformă presiunea în mişcare fizică. Această mişcare trebuie transformată pentru a obţine o mărime de ieşire electrică sau de alt fel. În final este necesară prelucrarea semnalului în funcţie de tipul senzorului şi de aplicaţie, afişarea lui. Principalele tipuri de elemente sensibile la presiune sunt (figura 9):

–tuburile Bourdon, –diafragmele,

–capsulele şi –membranele.

Tubul Bourdon este un tub sigilat, curbat, care se întinde sau strînge ca răspuns la presiunea aplicată. Toate, cu excepţia diafragmelor, dau o deplasare destul de largă, care este folositoare în aparatele de măsurat mecanice şi pentru senzorii electrici care cer o mişcare semnificativă.

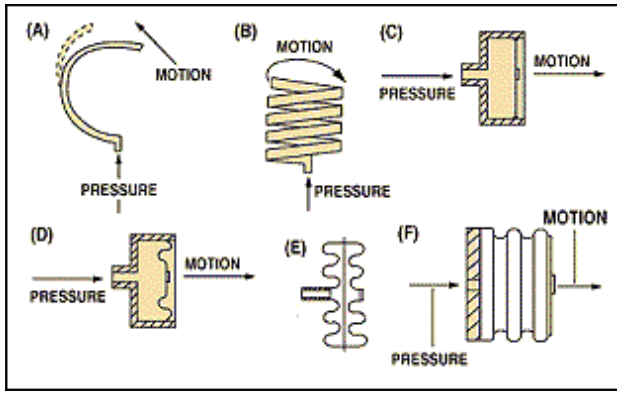


Figura 9. Elementele de bază sesizoare de presiune pot fi configurate ca (A) tub Bourdon în formă de C; (B) tub Bourdon elicoidal; (C) diafragmă plată; (D) diafragmă gofrată; (E) capsulă sau (F) tub gofrat (silfon).

La ***aparatele mecanice de măsurare a presiunii*** mişcarea creată de elementul sensibil este citită de un cadran sau indicator. Aceste procedee se folosesc de obicei în aplicaţii de performanţă joasă, incluzând măsurarea tensiunii arteriale şi aparatele de măsurat presiunea în automobile. Cuplajul mecanic al senzorului la sistemul de afişare poate introduce erori de repetabilitate, ce vor fi discutate mai târziu. Masa elementelor mecanice în mişcare din aparatele de măsură limitează răspunsul în frecvenţă, aceşti senzori utilizându-se doar pentru măsurarea presiunilor care se schimbă lent.

Senzorii de presiune electromecanici transformă presiunea aplicată într-un semnal electric. Se folosesc materiale şi tehnologii diverse în aceste procedee, pentru creşterea performanţelor, scăderea costului şi compatibilizarea cu aplicaţia. Semnalul electric de la ieşire asigură multe posibilităţi de utilizare în diferite aplicaţii.

Aplicaţii Industriale

Nivelul fluidului dintr-un recipient.

O jojă de presiune poziţionată să măsoare presiunea relativă la fundul unui recipient poate fi folosită pentru a indica la distanţă nivelul fluidului din rezervor folosind relaţia:

$$h = P / (\rho \cdot g) \qquad (18)$$

Debitul fluidului.

O diafragmă cu orificiu, plasată într-o secţiune a conductei, crează o cădere de presiune. Această metodă este des folosită pentru a măsura fluxul, deoarece căderea de presiune este mică în comparaţie cu alte tipuri de măsurare a fluxului

şi pentru că este imună la obturare, problemă ce deranjează măsurarea debitului unui mediu vâscos sau ce conţine particule în suspensie. Relaţia utilizată este:

$$\text{Viteza de curgere} = v = [2\cdot(P_{total} - P_{static})/\rho]^{1/2} \qquad (19)$$

În unele cazuri se măsoară presiuni diferenţiale de câţiva centimetri coloană de apă la presiuni ale fluidului de sute de atmosfere. Aceşti senzori de presiune sunt asfel construiţi pentru a nu se deteriora datorată presiunii de mod comun.

Aplicaţii ale măsurării presiunii la automobile

Există o mare varietate de aplicaţii ale măsurării presiunii în automobilele moderne controlate electronic.

Presiunea absolută la admisie (Manifold Absolute Pressure MAP).

Multe sisteme de control al motorului folosesc pentru măsurarea fluxului masic de aer de la admisia în motor determinarea densităţii şi vitezei aerului. Fluxul masic trebuie ştiut pentru a injecta cantitatea optimă de combustibil. MAP este utilizat în conjuncţie cu temperatura aerului de la intrare pentru a calcula densitatea aerului. Este necesar un senzor de presiune în domeniul 15 psia sau mai mult (la motoare supraalimentate sau turboalimentate). Este de dorit includerea unei corecţii de altitudine în sistemul de control care necesită măsurarea presiunii barometrice absolute (BAP). Unele sisteme folosesc un senzor separat, dar este mai simplu ca senzorul MAP să îndeplinească o funcţie dublă de vreme ce el citeşte presiunea atmosferică în 2 condiţii: înainte de a începe motorul să funcţioneze şi când clapeta de acceleraţie este larg deschisă.

Presiunea uleiului din motor.

Ungerea motorului necesită o presiune de 10-15 psig. Pompa de ulei este dimensionată să atingă această presiune la relanti, presiunea crescând odată cu turaţia motorului. O jojă potenţiometrică sau un întrerupător sensibil la presiune se foloseşte pentru această funcţie, ne fiind necesară o precizie mare.

Sistem de detecţie a scurgerilor prin evaporare din rezervorul de combustibil.

Rezervoarele moderne de combustibil, nu sunt ventilate (evacuate) în atmosferă pentru a reduce scurgerile şi poluarea. Vaporii de benzină din rezervorul de combustibil, rezultaţi din schimbările de presiune induse de schimbările de temperatură, sunt captaţi într-un absorbant din carbon şi ulterior reciclaţi prin motor. Regulile guvernului american cer ca scurgerile în acest sistem să fie monitorizate de un sistem aflat la bord. O abordare constă în crearea unei suprapresiuni în sistem şi măsurarea descreşterii presiunii într-un interval de timp fixat. Un senzor de 1 psig este folosit pentru această funcţie.

Presiunea anvelopei.

Recenta descoperire a cauciucului "run-flat" a grăbit dezvoltarea sistemului de măsurare de la distanţă a presiunii în anvelope. Motivul este că un cauciuc dezumflat de acest gen, este dificil de detectat vizual şi distanţa pe care poate fi folosit fără presiune este limitată.

FLUIDE VÂSCOASE

1. ***Vâscozitatea*** unui fluid este dată de frecarea dintre straturile de fluid. Cel mai corect spus este vorba de transferul de impuls de la un strat la altul transversal (perpendicular) pe strat. Imaginea care ne-o putem face este cea a unui top de hârtie de pe care tragem foaia de deasupra. Foaia de sus antrenează următoarea foaie care o antrenează pe următoarea şi aşa mai departe. Forţa de rezistenţă datorită vâscozităţii este proporţională cu suprafaţa de contact dintre cele două straturi şi cu gradientul vitezei (cât de rapid se modifică viteza de la un strat la altul). Relaţia ce descrie fenomenul este:

$$F_r = \eta\cdot S\cdot dv/dr \qquad (1)$$

unde η este *coeficientul de vâscozitate dinamică* al fluidului:

$$[\eta]_{SI}=N\cdot s/m^2=kg/(m\cdot s) \qquad (2)$$

$\eta_{aer} = 1{,}81\cdot10^{-5}$ kg/(m·s) la 20°C şi $2{,}18\cdot10^{-5}$ kg/(m·s) la 100°C
(vâscozitatea gazelor creşte uşor cu creşterea temperaturii)

$\eta_{apa} = 1{,}002\cdot10^{-3}$ kg/(m·s) la 20°C şi $0{,}283\cdot10^{-3}$ kg/(m·s) la 100°C
$\eta_{ulei} = 9{,}8\cdot10^{-1}$ kg/(m·s) la 20°C şi $1{,}7\cdot10^{-2}$ kg/(m·s) la 100°C
$\eta_{glicerina} = 2{,}33$ kg/(m·s) la 25°C
(vâscozitatea lichidelor scade mult cu creşterea temperaturii).

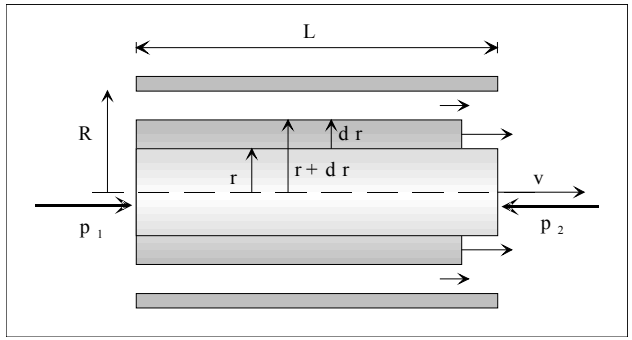


Figura 1. Curgerea laminară în conducte (curgere Poiseuille).

2. ***Curgerea Poiseuille***. Avem un tub de rază R şi lungime L. Forţa de frecare internă pe suprafaţa cilindrului de rază r este:

$$F_i = \eta \cdot S \cdot dv/dr = \eta \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dv/dr \qquad (3)$$

Diferenţa de presiune de le capetele tubului crează forţa ce învinge forţa de frecare:

$$\pi \cdot r^2 \cdot \Delta p = -\eta \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dv/dr \qquad (4)$$

care după separarea variabilelor şi integrare devine:

$$v(r) = (R^2 - r^2) \cdot \Delta p/(4 \cdot \eta \cdot L) = v_{max} \cdot (1 - r^2/R^2) \qquad (5)$$

unde: $$v_{max} = R^2 \cdot \Delta p/(4 \cdot \eta \cdot L) \qquad (6)$$

Viteza este maximă în centrul tubului (r =0) şi scade la zero după o lege parabolică către pereţii tubului (r =R).

Debitul volumic (Q=Sv) va fi dat de ***legea Hagen şi Poiseuille***:

$$Q = \int v \, dS = \int v_{max} (1 - r^2/R^2) \, 2\pi r \, dr = \pi R^4 \, \Delta p/(8\eta L) \qquad (7)$$

Se poate defini o "rezistenţă" a conductei, la fel ca în electricitate, ca raportul dintre tensiune, aici căderea de presiune Δp, şi curent, aici debitul Q:

$$R = \Delta p/Q = 8\eta L/(\pi R^4) \qquad (8)$$

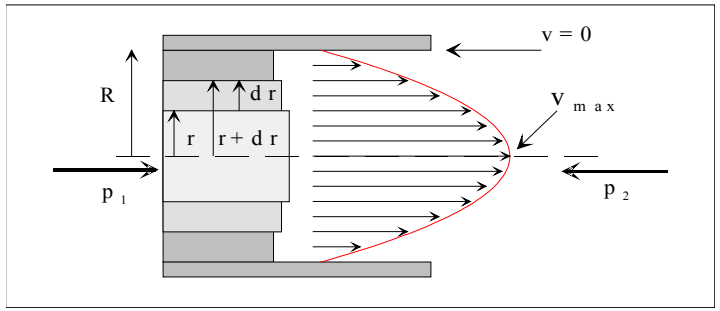


Figura 2. Distribuţia vitezelor straturilor de fluid în tubul capilar.

3. Un fluid, ***datorită vâscozităţii***, exercită asupra unui corp în mişcare o forţă dată de ***legea lui Stokes***:

$$F_v = 3 \cdot \pi^{1/2} \cdot S^{1/2} \cdot \eta \cdot v \qquad (9)$$

unde S este suprafaţa corpului spălată de fluid. Pentru o sferă în mişcare în fluid vâscos, fiindcă $S = 4\pi r^2$, relaţia devine mai simplă:

$$F_v = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \qquad (10)$$

O sferă din puf va fi mai puternic frânată decât o sferă netedă de aceeaşi dimensiune geometrică, fiindcă firele fine din puf vor crea o suprafaţă mult mai mare decât suprafaţa geometrică.

Datorită presiunii dinamice a fluidului $p_{dinam} = \rho \cdot v^2/2$ asupra unui corp imersat în fluid acţionează forţa:

$$F_d = C_d \cdot S \cdot \rho \cdot v^2/2 \qquad (11)$$

unde ρ este densitatea fluidului, iar C_d este coeficientul aerodinamic (adimensional), tabelat mai jos pentru câteva situaţii tipice.

Forţa de rezistenţă totală din partea fluidului va fi:

$$F_r = F_{visc} + F_{din} = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v + C_d \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot v^2/2 \qquad (12)$$

Raportul F_{din}/F_{visc} conţine un număr adimensional, ***numărul Reynolds***:

$$Re = \rho \cdot v \cdot r/\eta \qquad (13)$$

Corpul din fluid	Proporţia	⌀	C_d
Placă dreptunghiulară	a/b=	1	1,16
(a, b)		8	1,23
		25	1,57
		50	1,76
		∞	2,00
Cilindru	L/d=	1	0,91
		2	0,85
		4	0,87
		7	0,99
Disc circular			1,11
Semisferă ⇒ (			0,41
Semisferă ⇒)			1,35
Con plin	α=	60°	0,51
		30°	0,34

Valoarea numărului Reynolds determină tipul de curgere a fluidului pe lângă corpurile imersate în fluid sau prin conducte. În general pentru valori Re<100 curgerea este laminară, iar pentru Re>1000 curgerea este turbulentă.

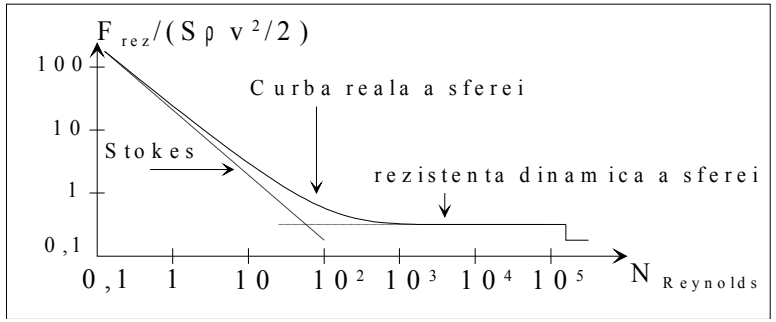


Figura 3. Forţa de rezistenţă exercitată asupra unei sfere ce se mişcă într-un fluid în funcţie de numărul Reynolds.

Exemple numerice.

1) Care este viteza limită a unei picături de ploaie (apă) r=1mm sau 0,1mm? (ρ_{aer}=1,3 kg/m^3, η_{aer}=1,8·10^{-5} kg/(m·s))

a) Care este viteza limită datorită forţei de rezistenţă vâscoasă?

b) Care este viteza limită datorită forţei de rezistenţă dinamică?

c) Cine determină viteza limită a picăturilor de ploaie, rezistenţa dinamică sau vâscozitatea? Cât este numărul Reynolds?

d) În cât timp şi pe ce distanţă se atinge viteza limită?

e) Dar în cazul grindinei cu r=5mm?

2) Care este viteza limită a unei bile de rulment, ρ_{fier}=7870 kg/m^3, r=2mm, în ulei cu densitatea ρ_{ulei}=0,9 g/cm^3 şi vâscozitatea η=0,9 kg/(m·s) sau în apă cu ρ_{apa}=1000 kg/m^3, η=1,8·10^{-3} kg/(m·s). Estimaţi timpul şi distanţa pe care se atinge v_{lim}. Cât este numărul Reynolds?

3) Un om suportă o cădere liberă de la 2m. Ce diametru trebuie să aibe cupola paraşutei ca omul cu m=100kg să aibe în aer viteza limită a căderii libere de la 2m? Consideraţi atât cazul frânării vâscoase cât şi cel al frânării dinamice. Se cunosc ρ_{aer}=1,3 kg/m^3, η_{aer}=1,8·10^{-5} kg/(m·s), C_d=1, g=10m/s^2. În cât timp şi pe ce distanţă se atinge viteza limită?

4) Cunoscând că pentru o conductă cilindrică numărul Re=2200 separă curgerea laminară de cea turbulentă, aflaţi viteza corespunzătoare acestui număr pentru raze ale conductei de r_1 = 1mm şi r_2 = 1cm. (apă şi aer).

η_{aer} = 1,8·10^{-5} kg/(m·s), ρ_{aer}=1,3 kg/m^3;

η_{apa} = 1·10^{-3} kg/(m·s), ρ_{apa}= 1000 kg/m^3.

a) Ce cădere de presiune apare pe o conductă de aer comprimat cu lungimea 1km şi diametrul 2cm la un debit de 1m^3/min.? Dar pentru apă?

5. Ce putere consumă forţa aerodinamică ce acţionează asupra automobilului cu masa m = 1 000 kg, dimensiunile H=1,5m, l=2m, L=4m şi coeficientul aerodinamic C=0,4, la viteza de 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144 km/h? Faceţi graficul puterii "P" în funcţie de viteza "v". (ρ_{aer} = 1,3 kg/m^3)

6. ***Aripa***. Un plan face unghiul α cu orizontala. Asupra sa acţionează un curent de aer cu viteza v. La ce unghi este maximă forţa verticală de ascensiune? Ce suprafaţă are o aripă care susţine o masă M=125kg la viteza orizontală de 36km/h pentru un unghi optim?

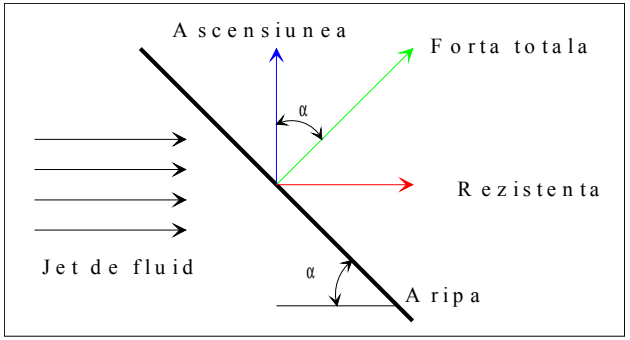


Figura 4. Un jet de fluid generează o forţă perpendiculară pe suprafaţa care i se opune. Această forţă are o componentă ascensională (verticală) şi o componentă de frânare (orizontală).

Aplicaţii

1. Un corp este acţionat de o forţă constantă (forţa de greutate) G=mg şi o forţă de frânare F_r = kv proporţională cu viteza. Găsiţi legea vitezei şi a spaţiului.

R. Aplicăm legea forţei :

$$ma = mg - kv \quad => \quad dv/dt = g - v\cdot k/m = (k/m)[(mg/k)-v]$$

Viteza maximă (limită) se atinge când a=0 => v'=mg/k

Notăm τ=m/k. Separăm variabilele v şi t şi integrăm:

$$\int dv/(v'-v)=\int \tau\cdot dt \quad => \quad -\ln(v'-v) + \ln C = t/\tau$$

Punând condiţia iniţială v = 0 la t = 0, avem lnC = ln(mg/k) şi exponenţiind avem:

$$v(t) = v'\cdot(1-e^{-t/\tau})$$

Ştiind că :

e^{-1} = 0,3678; 1- e^{-1} = 0,632= 63%
e^{-2} = 0,135 ; 1- e^{-2} = 0,864= 86 %
e^{-3} = 0,0498; 1- e^{-3} = 0,950= 95 %
e^{-4} = 0,018 ; 1- e^{-4} = 0,982= 98 %

tragem concluzia că după 3 constante de timp τ, mobilul atinge practic viteza sa limită v', mişcându-se în continuare uniform.

Frânarea proporţională cu viteza este caracteristică mişcării corpurilor cu viteză mică în fluide vâscoase. Forţa de frânare a unei sfere de rază r şi densitate ρ, care se mişcă cu viteza v, într-un fluid de densitate ρ' şi coeficient de vâscozitate η ($[\eta]_{SI}$ = kg/(s·m)) este:

$$f = 6\cdot\pi\cdot\eta\cdot r\cdot v \qquad \text{(legea lui Stokes)}$$

La limită, când sfera se mişcă uniform sub acţiunea forţei de greutate, a forţei arhimedice orientată în sens contrar greutăţii şi a forţei de frânare, avem egalitatea:

$$6\cdot\pi\cdot\eta\cdot r\cdot v' = (4/3)\pi r^3\, g\,(\rho-\rho')$$

din care putem deduce coeficientul de vâscozitate η măsurând viteza limită v':

$$\eta = (2/9)\, r^2\cdot g\cdot(\rho-\rho') / v'$$

2. Un corp este acţionat de o forţă constantă (forţa de greutate) G=mg şi o forţă de frânare $F_r = kv^2$ proporţională cu pătratul vitezei. Găsiţi legea vitezei şi a spaţiului.

R. Aplicăm legea forţei:

$$ma = mg - kv^2 \quad => \quad a\cdot(m/k) = (mg/k) - v^2\,,$$

Viteza maximă (limită) se atinge când a=0 => $v'^2 = mg/k$

$$(dv/dt)\cdot(m/k) = v'^2 - v^2 = (v'-v)\cdot(v'+v)$$

Separăm variabilele v şi t: => $dv/[(v' - v)(v' + v)] = dt\,(k/m)$

şi ţinând cont că :=> $1/[(v'-v)(v'+v)]=(1/2v')[1/(v'-v)+1/(v'+v)]$

putem scrie că : => $dv/(v'-v) + dv/(v' +v) = dt\,(2v'k/m)$

Notând $\tau = m/(2v'k) = (1/2)[m/(g\cdot k)]^{1/2}$ avem:

$$\int dv/(v'-v) + \int dv/(v' + v) = \int dt/\tau$$

După integrare cu condiţia iniţială v = 0 la t = 0, avem:

$$\ln[(v' + v)/(v' - v)] = t/\tau$$

de unde exponenţiind avem : => $(v' + v)/(v' - v) = e^{t/\tau}$

Rearanjând obţinem: => $v(t) = v'\,(e^{t/\tau} - 1)/(\,e^{t/\tau} + 1)$

sau după amplificare cu $e^{-t/\tau}$ => $v(t) = v'\cdot(1-e^{-t/\tau})/(1+e^{-t/\tau})$

relaţie similară cu cea de la problema anterioară, implicit comportarea mobilului va avea similitudini cu mişcarea sub acţiunea frânării proporţionale cu viteza.

Ştiind că :

$e^{-1} = 0{,}368$; $1- e^{-1} = 0{,}632= 63\ \%$; $1+ e^{-1} = 1{,}3678$
$e^{-2} = 0{,}135$; $1- e^{-2} = 0{,}864= 86\ \%$; $1+ e^{-2} = 1{,}135$
$e^{-3} = 0{,}049$; $1- e^{-3} = 0{,}950= 95\ \%$; $1+ e^{-3} = 1{,}049$
$e^{-4} = 0{,}018$; $1- e^{-4} = 0{,}982= 98\ \%$; $1+ e^{-4} = 1{,}018$

similar cu problema precedentă tragem concluzia că după 3 constante de timp τ, mobilul atinge practic viteza sa limită v', mişcându-se în continuare uniform.

Acestă forţă de frânare este caracteristică mişcării obiectelor cu viteză mare într-un fluid, de exemplu autovehiculele în aer. Presiunea dinamică ce acţionează asupra secţiunii mobilului, transversale pe direcţia de curgere a fluidului:

$$p_{din} = \rho\, v^2/2$$

unde: ρ– densitatea fluidului, 1,29 kg/m^3 pentru aer,
v– viteza relativă fluid-solid,
S– secţiunea mobilului,

crează forţa de frânare:

$$F_r = K\cdot S\cdot\rho\cdot v^2/2$$

unde K este coeficientul aerodinamic ce depinde de forma obiectului:

Alte teme legate de lichide

Pentru lucrarea de laborator e important că: $\eta_1 /t_1 = \eta_2 /t_2$, unde t_1 şi t_2 sunt timpii în care aceleaşi volume din cele două fluide trec prin capilar. Dacă Δp e creat de presiunea hidrostatică (scurgerea lichidului între 2 repere verticale atunci $\eta_1 /(\rho_1\, t_1) = \eta_2 /(\rho_2\, t_2)$.

Tensiunea superficială $F=\sigma\, L$

Formula Laplace, presiunea sub suprafeţe curbe $\Delta p=\sigma\cdot(1/R'+1/R'')=2\cdot\sigma/R$

Legea Jurin $\rho\cdot g\cdot h=2\cdot\sigma\cdot\cos\theta/R$

Metoda picăturilor $mg=2\pi r\sigma$, r=raza tubului de picurare

Metoda bulelor $p_{max} =\rho gh + 2\sigma/R$, R=raza tubului pentru suflat bule

MĂSURAREA TEMPERATURII

Senzorii de temperatură sunt peste tot – de la termometrul medical al familiei sau termostatatul de pe perete la senzorii de pe liniile de producție sau cei de pe navetele spațiale. Pentru satisfacerea multiplelor aplicații, industria senzorilor a dezvoltat tehnici de sesizare diverse.

Temperatura este o măsură a stării termodinamice a obiectului ori sistemului, şi descrie macroscopic cantitatea de energie cinetică microscopică din material:

$$m\cdot\langle v\rangle^2/2 = (3/2)\cdot k_B\cdot T \qquad (1)$$

unde: m –masa unei molecule;
$\langle v\rangle^2$ –viteza pătratică medie a unei molecule;
k_B –constanta Boltzmann ($1{,}38\cdot10^{-23}$ J/K);
T –temperatura în grade absolute, Kelvin, K (=273+t °C).

Dacă două corpuri au aceeaşi temperatură, sunt în echilibru termodinamic unul față de celălalt. Punându-le în contact nu va exista schimb de căldură între ele (*principiul zero al termodinamicii*).

Temperatura nu e o măsură a cantității de energie termodinamică a sistemului. Materiale diferite cu masa unitară (1 kg) cedează sau primesc cantități diferite de energie pentru a-şi modifica temperatura cu o valoare dată. Temperaturile identice a două corpuri implică doar că nu se va transfera căldură între ele, indiferent de energia termică stocată în fiecare corp. Cantitatea de căldură (energie termică) necesară schimbării cu un grad a temperaturii unui kilogram dintr-un material dat reprezintă ***căldura specifică*** "c" a materialului:

$$c = Q/(m\cdot\Delta t) \qquad [c]_{SI}= J/(kg\cdot grd) \qquad (2)$$

unde: Q – căldura schimbată (primită sau cedată) de corp în Joule-i "J";
m – masa corpului în kilograme "kg";
Δt – variația temperaturii (creştere/scădere) în grade Celsius (Kelvin).

Relația este foarte utilă pentru calcularea căldurii schimbate de un corp când ştim variația temperaturii din măsurători şi căldura specifică din tabele (măsurători făcute de alții), constituind baza "***Calorimetriei***":

$$Q = m\cdot c\cdot\Delta t = m\cdot c\cdot(t_{final} - t_{inițial}) \qquad (3)$$

Schimb de căldură poate exista şi fără modificarea temperaturii ca în cazul apei care fierbe sau a vaporilor de apă ce condensează (tranziții de fază de ordinul întâi). Această căldură raportată la masa unitate se numeşte ***căldură latentă*** de ***vaporizare/condensare*** sau ***topire/solidificare***:

$$\lambda= Q/m \qquad [\lambda]_{SI}= J/kg \qquad (4)$$

Standardul actual pentru măsurarea temperaturii este Scala Internațională de Temperatură din 1990 (International Temperature Scale ITS-90), bazat pe punctele de tranziție de fază ale unor substanțe pure, cu gradul Kelvin definit ca 1/273,16 din temperatura absolută a punctului triplu al apei. Alte puncte fixe principale ce definesc de această scală sunt date în tabel.

Puncte fixe principale

Temperatura K	Temperatura °C	Substanța	Tranziția de Stare
13.8033	–259.3467	Hidrogen	Punct triplu
83.8058	–189.3442	Argon	Punct triplu
243.3156	–38.8344	Mercur	Punct de topire
273.1616	0.0100	Apa	Punct triplu
429.7485	156.5985	Indiu	Punct de topire
692.6770	419.5270	Zinc	Punct de topire
1234.9300	961.7800	Argint	Punct de topire

Definirea scalei de temperatură pe baza punctelor triple sau a celor de topire/solidificare este făcută din cauză că ele pot fi reproduse cu un grad înalt de precizie şi repetabilitate. Măsurarea temperaturii între punctele de referință se face interpolând între aceste puncte de calibrare.

Dispozitive mecanice de măsurare a temperaturii

Termometrul cu lichid

Modificarea temperaturii produce dilatarea (sau contractarea) materialului. Pe acest fenomen se bazează multe termometre. Tipic este ***termometrul cu lichid*** unde un volum "V" de lichid închis în *bulbul* termometrului se dilată şi volumul suplimentar urcă într-un tub subțire *capilar*. Înălțimea la care urcă va fi:

$$h= t\cdot4\cdot V_o\cdot(a_{lichid} - a_{sticla}) /(\pi\cdot d^2) \qquad (5)$$

rezultând din egalarea volumului suplimentar de lichid ΔV care iese din bulb şi ocupă un volum cilindric în capilar:

$$\Delta V = V_o\cdot[1+(a_{lichid} - a_{sticla})\cdot t] - V_o = h\cdot\pi\cdot d^2/4 \qquad (6)$$

unde: V_o – este volumul bulbului (şi de lichid din bulb) la t=0
a_{lichid} – coeficientul de dilatare volumică al lichidului
a_{sticla} – coeficientul de dilatare volumică al sticlei termometrului
d – diametrul tubului capilar
t – temperatura în grade Celsius.

Lichidele cele mai folosite sunt alcoolul (colorat cu un colorant pentru a fi vizibil în tubul capilar) şi mercurul.

Termometrul cu bimetal

Dilatarea termică este utilă în ***termometrele cu bimetal***. Termobimetalele se realizează din lamele subțiri din metale sau aliaje cu coeficienți de dilatare termică liniară diferiți, sudate pe întreaga lor lungime prin laminare la cald. Sub acțiunea căldurii apar deformații dinspre *materialul activ* (A) cu coeficient de dilatare termică mare, spre *materialul inert* (I) sau pasiv cu coeficient de dilatare mic. Dacă la temperatura de 0°C lamela bimetalică este dreaptă, reprezentată cu linie roşie, la creşterea temperaturii cu Δt°C, prin alungirea termică diferită a celor două materiale, lamela se va curba aproximativ ca un arc de cerc cu raza "R" care închide unghiul la centru "Δφ=2·u" (reprezentată cu linie neagră). Exprimând alungirile termice al celor două lamele cu condiția aderenței lor pe întreaga lungime de contact, rezultă:

$$L_1 = \Delta\varphi \cdot R_1 = L\cdot(1+\alpha_I\cdot\Delta t)$$

$$L_2 = \Delta\varphi\cdot(R_1 + g) = L\cdot(1+\alpha_A\cdot\Delta t) \quad \Rightarrow \Delta\varphi\cdot g = L\cdot(\alpha_A-\alpha_I)\cdot\Delta t \qquad (7)$$

unde: α_A, α_I - coeficienții de dilatare termică liniară ai celor două materiale;
g - grosimea totală a celor două lamele;
L - lungimea lamelei în stare nedeformată.

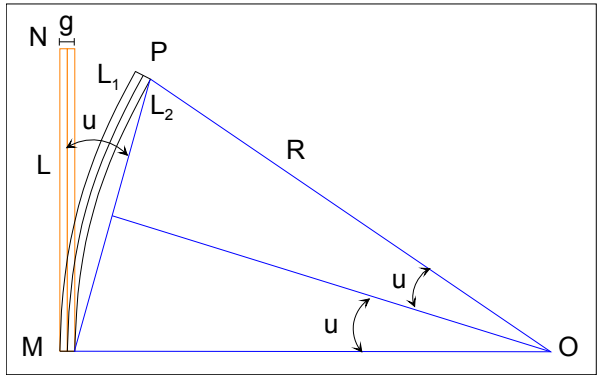


Figura . Deformarea bimetalului sub acțiunea căldurii

Aproximând curbarea lamelei cu o rotire a ei de unghi u=Δφ/2, obținem deplasarea "f=NP" a capătului liber al lamelei:

$$f = L\cdot\Delta\varphi/2 = L^2\cdot(\alpha_A-\alpha_I)\cdot\Delta t/(2\cdot g) \qquad (8)$$

Un calcul mai exact oferă rezultatul:

$$\Delta\varphi = (3/2)\cdot(\alpha_A-\alpha_I)\cdot L\cdot\Delta t / g \qquad (9)$$

iar din:

$$1/R = \Delta\varphi / L \qquad (10)$$

cu ajutorul integralei lui Mohr, se poate obține ***săgeata termică*** – deplasarea capătului mobil al lamelei – caracteristica statică a traductorului:

$$f = 3\cdot L^2\cdot(\alpha_A-\alpha_I)\cdot\Delta t/(4\cdot g) = S\cdot\Delta t \qquad (11)$$

Sensibilitatea traductorului "S" este cu atât mai mare cu cât diferența între coeficienții de dilatare termică şi lungimea lamelei sunt mai mari şi grosimea lamelei mai mică:

$$S = 3\cdot L^2\cdot(\alpha_A-\alpha_I)/(4\cdot g) \qquad (12)$$

Din condiții de rezistență a materialelor rezultă un maxim al sensibilității dacă:

$$g_A / g_I = (E_I / E_A)^{1/2} \qquad (13)$$

unde "E" este modulul de elasticitate (Young) al fiecărui material.

Termometrul cu gaz la volum constant

Termometrul cu gaz la volum constant funcționează pe baza ecuației termice a gazelor:

$$p\cdot V = n\cdot R\cdot T \qquad (14)$$

unde: p–presiunea gazului;
V–volumul gazului;
n–numărul de kilomoli de gaz;
R–constanta universală a gazelor (8310 J/(K·kmol))
T–temperatura în grade absolute, Kelvin, K (=273+t ºC).

Ecuația [14] arată că se poate măsura temperatura din dilatarea unui gaz la presiune constantă. În practică este mai avantajos să menținem volumul de gaz constant şi să măsurăm presiunea pentru a determina temperatura. Avantajele acestui tip de termometru sunt deosebita liniaritate şi repetabilitatea.

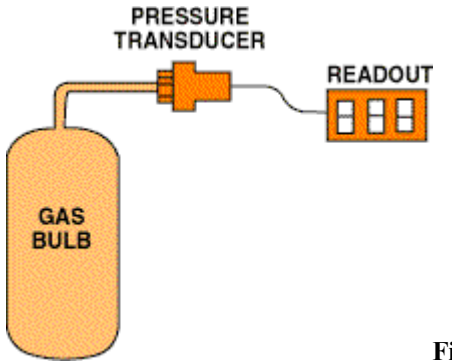


Figura 1. În termometrul cu gaz la volum constant, temperatura este măsurată de presiunea generată de un volum fix de gaz.

Dispozitive electrice pentru măsurarea temperaturii

Termocuplul

Într-un fir metalic ale cărui capete se află la temperaturi diferite $T_A > T_B$ apare o diferență de potențial electric U_{AB} cauzată de faptul că electronii de conducție din capătul cu temperatură mai mare au o energie cinetică mai mare şi vor difuza către capătul mai rece. În acest fel capătul cald se va încărca pozitiv iar capătul rece al firului se va încărca negativ. De remarcat că în cazul în care purtătorii mobili de sarcină sunt golurile, sarcini pozitive, atunci capătul cald se încarcă negativ iar cel rece pozitiv. Acest fenomen a fost pus în evidență de Seebeck în anul 1821 şi poartă numele de *efect Seebeck*. Din această cauză efectul termoelectric sau efectul Seebeck este folosit pentru determinarea tipului de purtători de sarcină liberi dintr-un semiconductor.

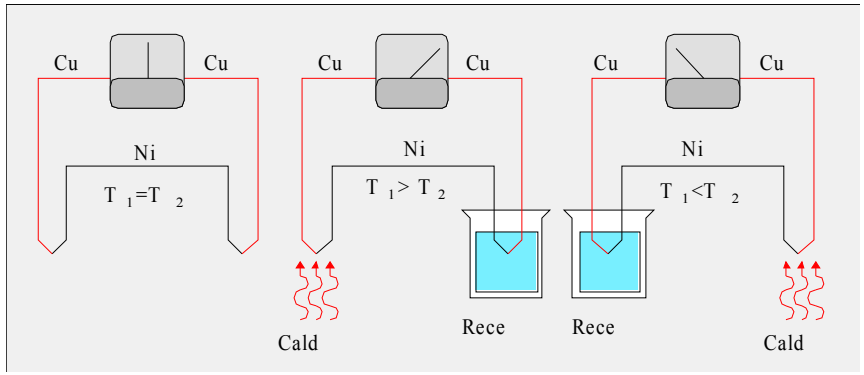


Figura 2. Generarea unei tensiuni termoelectrice prin aplicarea unei diferențe de temperatură unui dispozitiv format din 2 metale diferite.

Efectul Seebeck are trei cauze care se reflectă în coeficientul Seebeck :

$$S = S_v + S_c + S_f \qquad (15)$$

S_v -componenta volumică a coeficientului Seebeck, datorată difuziei preponderente a purtătorilor mobili de sarcină electrică de la extremitatea caldă spre cea rece;

S_c -componenta de contact a coeficientului Seebeck, datorată variației potențialului de contact cu temperatura, legat de dependența de temperatură a potențialului chimic, nivelul Fermi F (importantă doar la semiconductori);

S_f -componenta fononică a coeficientului Seebeck, datorată antrenării electronilor de conducție de către fononii (vibrațiile rețelei cristaline) care se deplasează de la extremitatea caldă spre cea rece (importantă doar la temperaturi foarte joase, criogenice).

Tensiunea termoelectromotoare (t.t.e.m.) U_{AB} este direct proporțională cu diferența de temperatură dintre capetele firului:

$$U_{AB} = V_A - V_B = S\cdot(T_A - T_B) \qquad (16)$$

unde S este coeficientul Seebeck, o proprietate a materialului din care este făcut firul. În cazul concret în care firul este din cupru şi plecăm din A şi B tot cu fire din cupru către un instrument de măsură sensibil, vom constata că tensiunea indicată va fi zero. Cauza este aceea că din tensiunea inițială U_{AB} se scade tensiunea termoelectrică a firelor de legătură, în cazul de față identică cu tensiunea inițială. Este ca şi cum am lega două baterii identice cu bornele "+" împreună şi bornele "–" împreună, oriunde întrerupem circuitul şi măsurăm tensiunea, aceasta va fi zero. Situația se schimbă dacă între punctele A şi B avem un fir de nichel, iar de la punctele A şi B plecăm către instrumentul de măsură cu un fir din cupru, atunci voltmetrul va indica o diferență de potențial. În acest caz fiind vorba de metale diferite, cu coeficienți Seebeck diferiți, diferența de potențial măsurată va fi:

$$U = U_{AB}(Ni) - U_{AB}(Cu) = S_{Ni}\cdot(T_A - T_B) - S_{Cu}\cdot(T_A - T_B) =$$
$$= (S_{Ni} - S_{Cu})\cdot(T_A - T_B) \qquad (17)$$

De regulă se dau în tabele coeficienții Seebeck relativi, măsurați pentru materialul respectiv față de un material de referință (de cele mai multe ori platina). Alăturat este tabelul cu valoarea tensiunii termoelectromotoare (t.t.e.m.) U, în milivolți, pentru diverse materiale față de platină (Pt) atunci când o joncțiune este menținută la 0°C şi cealaltă la 100°C.

Metal	Ag	Bi	Cu	Co	Fe	Ge	Mo	Ni	Pb	Sb	Si
U(mV)	0,74	-7,34	0,76	-1,33	1,98	33,9	1,45	-1,48	0,44	4,89	-41,5

Coeficientul Seebeck al unui material nu rămâne constant în funcție de temperatură. Materialele care puse împreună manifestă efect Seebeck formează un ***termocuplu***. Două materiale poat fi folosite împreună într-un termocuplu industrial doar dacă coeficientul Seebeck al cuplului este relativ constant pe domeniul de temperaturi în care se lucrează.

Avantajele termocuplelor sunt prețul mic (o pereche de fire de 1m <1$), precizia bună a măsurătorilor şi domeniul de lucru larg (<0°C la >1000°C).

Principalul dezavantaj al termocuplelor este tensiunea mică produsă (50 µV/°C la termocuplul Fe/constantan tip J). Problema acestei tensiuni nu este neapărat mărimea ei ci faptul că este comparabilă tensiunile termoelectrice generate pe joncțiunile parazite formate la conexiunile între fire către instrumentul de măsură.

Tensiunile termoelectrice (mV) generate de termocuplurile industriale uzuale

Temperatura (°C)	Tip N +Nicrosil – Nisil	Tip T +Cu –Constantan	Tip J +Fe –Constantan	Tip E +Cromel –Constantan	Tip K +Cromel –Alumel	Tip S +PtRh –Pt
–200		-5,7	-8,15	-8,824	-5,89	
–100		-3,4	-4,60	-5,237	-3,55	
0	0	0	0	0	0	0
100	2,774	4,25	5,37	6,317	4,10	0,64
200	5,912	9,20	10,95	13,419	8,13	1,44
300	9,340	14,89	16,55	21,033	12,21	2,32
400	12,972	20,99	22,15	28,943	16,40	3,26
500	16,744	27,40	27,84	36,999	20,65	4,22
600	20,609	34,30	33,66	45,085	24,91	5,23
700	24,526		39,79	53,11	29,15	6,27
800	28,456		46,23	61,022	33,32	7,34
900	32,370		53,15	68,783	37,37	8,45
1000	36,248				41,32	9,60
1100	40,076				45,16	10,77
1200	43,836				48,85	11,97
1300	47,502					13,17
1400						14,38
1500						15,58
1600						16,76

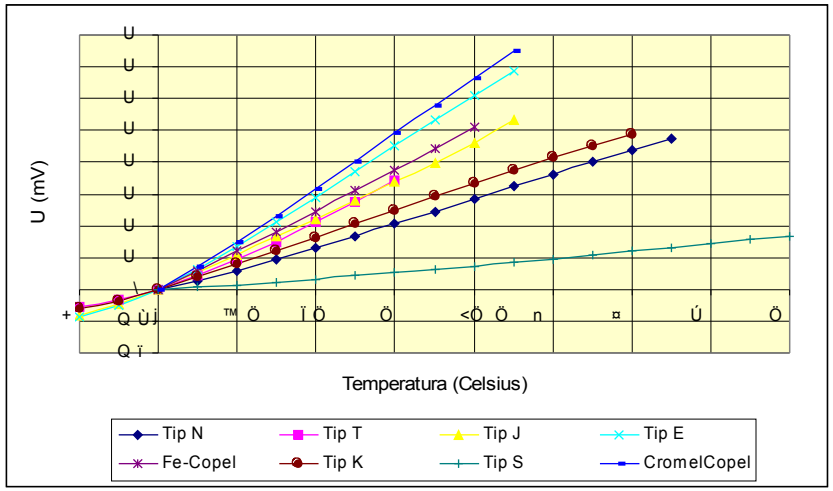


Figura 3. Graficul tensiunilor termoelectrice în funcție de temperatură pentru termocuplurile uzuale.

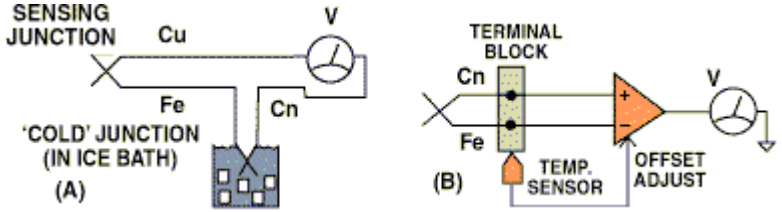


Figura 4. Un termocuplu are întotdeauna două joncțiuni, una de măsură (caldă) alta de referință (rece). Într-un montaj clasic (A) joncțiunea de referință a termocuplului e menținută la temperatură constantă în apă cu gheață (0°C). În sistemele moderne de măsurare a temperaturii (B) se folosește un senzor de temperatură suplimentar care compensează efectul joncțiunii reci aflată la temperatura mediului ambiant (variabilă).

Termorezistența din platină

Din cauza vibrațiilor atomilor în nodurile rețelei cristaline a unui metal, deplasarea electronilor de conducție este îngreunată. În acest fel apare rezistivitatea electrică a metalelor dependentă de temperatură fiindcă amplitudinea vibrațiilor rețelei cristaline este dependentă de temperatură. Cunoscând dependența de temperatură a rezistivității electrice a metalului, putem construi un senzor de temperatură bazat pe acest fenomen. Platina se utilizează la construirea termorezistențelor fiindcă se prelucrează relativ ușor și este stabilă din punct de vedere chimic și fizic pe o gamă largă de temperaturi în diverse medii.

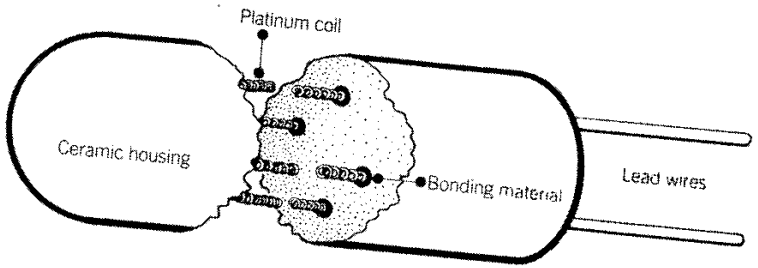


Figura 5. Construcția unei termorezistențe din platină

Pentru comportarea rezistenței electrice a platinei în funcție de temperatură avem ecuația empirică Callendar-Van Dusen :

$$R/R_0 = 1+\alpha\cdot[t-\delta\cdot(t/100-1)\cdot(t/100)-\beta\cdot(t/100-1)\cdot(t/100)^3] \qquad (18)$$

- R = rezistența electrică la temperatura "t" ;
- R_0 = rezistența electrică la 0°C;
- $\beta=0$ pentru $t \geq 0°C$, $\neq>0$ la $t<0$;

- α – panta medie a curbei rezistenţă/temperatură în intervalul 0⇔100°C, fiind un indicator bun al purităţii platinei şi al stării de tratament termic (recoacere, annealing); $\alpha = (R_{100} - R_0)/(100 \cdot R_0)$
- δ – depărtarea de la liniaritate a curbei rezistenţă/temperatură în intervalul 0-100°C, depinzând de dilatarea termică a materialului şi de densitatea de stări electronice lângă nivelul Fermi.

Termorezistenţele sunt făcute din platină cu puritate conform standardelor IEC/DIN, în care platina este uşor impurificată cu un metal din grupa platinei, sau din platină cu puritate de referinţă 99,99%. La 0°C ambele termorezistenţe au 100 Ω, dar la 100°C platina de puritate IEC/DIN va arăta 138,5 Ω, iar cea cu puritate de referinţă 139,26 Ω.

- Platina cu puritate IEC/DIN are $\alpha = 3{,}850 \cdot 10^{-3}$ Ω/Ω/°C
- Platina cu puritate de referinţă are $\alpha = 3{,}926 \cdot 10^{-3}$ Ω/Ω/°C

Ecuaţia Callendar-Van Dusen poate fi aproximată cu relaţia mai simplă :

$$R = R_0 (1 + At + Bt^2) \qquad t \geq 0°C \qquad (19)$$

$$R = R_0 [1 + At + Bt^2 + C(t - 100\ ^oC)t^3] \qquad t < 0°C \qquad (20)$$

unde: $A = \alpha \cdot (1 + \delta/100)\ °C^{-1}$, (21)
$B = -\alpha \cdot \delta\ 10^{-4}\ °C^{-2}$.

Pentru interşanjabilitatea termorezistenţelor de platină standardul internaţional IEC 751, echivalent ITS 90, stabileşte următoarele valori pentru coeficienţii din relaţia rezistenţă/temperatură :

$$A = 3{,}90833 \cdot 10^{-3}\ °C^{-1}; \qquad (22)$$
$$B = -5{,}7753 \cdot 10^{-7}\ °C^{-2};$$
$$C = -4{,}1833 \cdot 10^{-12}\ °C^{-4}.$$

Calităţi metrologice

Precizia. Standardul IEC 751 stabileşte două clase de precizie pentru toleranţele admise la citirea temperaturii cu ajutorul termorezistenţelor de platină :

- clasa A $\Delta t = \pm (0{,}15 + 0{,}002 \cdot |t|)$ [°C], între –200 şi +650 °C în conexiune cu 3 sau 4 terminale,
- clasa B $\Delta t = \pm (0{,}30 + 0{,}005 \cdot |t|)$ [°C], între –200 şi +850 °C

Stabilitatea -capacitatea senzorului de-a menţine aceeaşi valoare la ieşire atunci când condiţiille de intrare se menţin constante (în timp). Tensionările mecanice datorate coeficienţilor de dilatare diferiţi ale platinei şi materialelor suport sau modificări chimice datorate atmosferei în care lucrează termorezistenţa pot genera alterarea răspunsului. La RTD avem un drift de 0,05 °C/an.

Repetabilitatea - proprietatea senzorului de-a indica aceleaşi valori pentru aceleaşi condiţii de intrare aplicate în mod repetat.

Moduri de măsurare a temperaturii

Sesizarea temperaturii se poate face prin:
- contact cu obiectul
- fără contact.

Sesizarea prin contact a temperaturii se face cu:

- ⇨ Termometre mecanice
- ⇨ Termocuplul
- ⇨ Termorezistenţa (RTD, ***R***esistance ***T***emperature ***D***etector)
- ⇨ Termistorul
- ⇨ Dispozitive semiconductoare

Sesizarea fără contact a temperaturii se face prin măsurarea energiei undelor electromagnetice emise de corpurile solide sau lichide, de obicei radiaţia infraroşie (IR).

Avantajele Termocuplelor
- Lucreză la temperaturi mari
- Robuste
- Pot să răspundă repede

Avantajele RTD
- Domeniu larg de temperaturi
- Repetabilitate şi stabilitate
- Liniaritate
- Costuri mici de interconectare

Avantajele Termistoarelor
- Preţ mic
- Rezistenţă electrică mare
- Dimensiuni mici
- Semnal mare
- Sensibilitate mare

Avantajele IR
- Interacţiune minimă cu mediul
- Măsoară temperatura obiectelor în mişcare
- Nu contaminează obiectul măsurat
- Poate fi izolat de mediile periculoase

Selectaţi senzorul de temperatură răspunzând acestor întrebări:

- Aplicaţia necesită sesizarea temperaturii cu sau fără contact?
- Ce precizie se pretinde pentru citirea temperaturii?

- Pe ce domeniu de temperatură se măsoară?
- Care-i temperatura maximă suportată de senzor?
- Cât de rapid trebuie să răspundă senzorul?
- Ce timp de viață trebuie să aibe senzorul?
- Ce condiționări legate de mediu există?
- Senzorul necesită dispozitive de protecție mecanică?
- Care-i bugetul alocat problemei?

Etalonați termometrul folosind punctele fixe principale (vezi tabelul de mai sus) sau punctele fixe secundare (vezi tabelul de mai jos)

Puncte fixe secundare

Temperatura K	Temperatura °C	Substanța	Transformarea de stare
250,25	–22,90	CCl_4	Topire
273,15	0,00	Gheață	Topire
305,53	32,38	Na_2SO_4	Tranziție
505,00	231,85	Staniu	Topire
594,05	320,90	Cadmiu	Topire
600,55	327,40	Plumb	Topire
903,90	630,74	Stibiu	Topire
1073,55	800,40	NaCl	Topire

Sisteme de încălzire cu acumulare de căldură

Sistemele de încălzire cu acumulare de căldură (sobele) acumulează căldura prin încălzirea cărămizilor din corpul sobei. Știind densitatea cărămizilor d= 1900kg/m^3 şi căldura lor specifică c = 0,88kJ/(kg.grd) putem calcula capacitatea calorică volumică (cantitatea de căldură necesară încălzirii cu un grad a unui metru cub din acel material):

$$Q_v = d\cdot c = 1{,}64\ \mathrm{MJ/(m^3\cdot grd)}$$

Apa ca mediu de acumulare (d=1000 kg/m^3, c= 4,185 kJ/(kg·grd)) are de 2,55 ori mai mare capacitatea calorică volumică decât cărămida:

$$Q_v = d\cdot c = 4{,}185\ \mathrm{MJ/(m^3\cdot grd)}$$

O sobă tipică (ℓ=L=0,5m şi H=2m) cu volumul: $V=\ell \times L \times H = 0{,}5\ \mathrm{m}^3$

şi masa $m=d\cdot V=950$ kg, încălzită de la 20°C la 90°C acumulează energia:

$$Q=V\cdot Q_v\cdot \Delta t = 57{,}4\ \mathrm{MJ} \qquad (\Delta t = 90-20=70°\mathrm{C})$$

O sobă cu apă cu volumul jumătate (ℓ=L=0,5m şi H=1m) are masa 250kg şi va acumula cu 27% mai multă căldură: $Q = V\cdot Q_v\cdot \Delta t = 0{,}25\cdot 4{,}185\cdot 70 = 73{,}2$ MJ.

Sistemele avansate de acumulare a căldurii (Z.Ardeleanu, Gh. Folescu - Captatoare solare - Ed.Şt. Enc. 1980 p. 71) folosesc săruri hidratate care au capacități calorice volumice similare cu apa şi mai pot acumula căldură pe seama căldurii latente de dizolvare.

Exemple numerice

1. Sarea Glauber (sulfat de sodiu, $Na_2SO_4\cdot 10H_2O$) se dizolvă endoterm până la 32,4°C. Are căldura latentă de dizolvare L=241,9kJ/kg şi densitatea 1553kg/m^3. Căldura latentă volumică va fi:

$$Q_v = L\cdot d = 375{,}6\ \mathrm{MJ/m^3}$$

aproape cât absoarbe 1 m^3 de apă pe un interval de temperatură Δt = 89,7°C. Cu căldura specifică C=2,93 kJ/(kg·grd) are capacitate termică de 4,55MJ/(m^3·grd).

2. Carbonatul de sodiu (soda de rufe, $Na_2CO_3\cdot 10H_2O$) se dizolvă endoterm între 32,2 - 36,1°C, căldura latentă L = 246,5 kJ/kg, şi densitatea d = 1441 kg/m^3 dau o căldură latentă volumică:

$$Q_v = L\cdot d = 355\ \mathrm{MJ/m^3}.$$

3. O variantă interesantă este parafina (d = 900 kg/m^3, L = 151,3 kJ/kg) care are o capacitate calorică volumică:

$$Q_{v1} = d\cdot c = 2{,}61\ \mathrm{MJ/(m^3\cdot grd)}$$

şi de la topire:

$$Q_{v2} = L\cdot d = 136\ \mathrm{MJ/m^3}.$$

(A se cerceta săpunul, mai stabil chimic, ceara de albine, aliaje uşor fuzibile).

Scări termometrice şi relațiile dintre ele

Temperatura este o mărime scalară ce caracterizează starea de încălzire a unui sistem fizico-chimic. Pentru determinarea valorilor temperaturii, se definesc mai multe ***scări termometrice***, fiecăreia dintre acestea corespunzându-i o anumită unitate de masură a temperaturii, având denumirea generică de grad termometric.

Scara de temperatură: succesiune de valori într-un interval de temperatură după a cărui origine (punct zero) scările de temperatură se clasifică în scări convenționale şi scări absolute.

Scara Celsius (scara centesimală): scara convențională de temperatură având la baza intervalul de temeratură dintre punctul de topire al gheței la presiune normală, căruia în mod convențional i s-a atribuit temperatura zero (originea scării) şi punctul de fierbere al apei la presiunea normală, căruia convențional i s-a atribuit temperatura 100. În relațiile în care se utilizează scara Celsius, temperatura se notează "*t*".

Grad Celsius (°C): unitate de măsură pentru temperatură în scara Celsius, egală cu a 100-a parte din intervalul acestei scări. Are valoare egală cu a unității din S.I., este folosită în țara noastră.

Scara Reaumur - scară convențională de temperatură, având la bază intervalul de temperatură dintre punctul de topire al gheței şi punctul de fierbere al apei, interval împărțit în 80 de părți. În relatiile în care se utilizează scara Reaumur, temperatura se noteaza cu R. t = 100/80·°R (1°C=0,8°R)

Grad Reaumur (°R): unitate de măsura pentru temperatură în scara Reaumur, egală cu a 80-a parte din intervalul acestei scări.

Scara Fahrenheit (este folosită în țările anglo-saxone): scară convențională de temperatură , având la bază intervalul de temperatură dintre punctul de topire al gheței, căreia i s-a atribuit valoarea 32 şi punctul de fierbere al apei, căruia i s-a atribuit valoarea 212, scara având deci o întindere de 212 părți, dintre care 180 de părți corespund intervalului de temperatură considerat. În relatiile în care se utilizează scara Fahrenheit, temperatura se noteaza cu F.

Grad Fahrenheit (°F): unitate de măsură pentru temperatură, în scara Fahrenheit egal cu a 212-a parte din această scară, respectiv cu a 180-a parte din intervalul de temperatură care stă la baza acestei scări. Nu este folosită în țara noastră (1°C=1,8°F, 1,8=18/10=9/5)

$$t\ (°C) = 100\cdot[t\ (°F) - 32]\ /180 = [t\ (°F) - 32]\ /1{,}8$$

$$t\ (°F) = 32+180\cdot t\ (°C)\ /100 = 32+1{,}8 \cdot t\ (°C)$$

Scara termodinamică: scară de temperatură la care intervalul de temperatură nu se mai stabileşte prin proprietăți fizice de referință ale unui corp, ci prin schimburi de căldură.

Scara termodinamică absolută (scara Kelvin): scară de temperatură bazată pe principiul lui Carnot, al cărei punct zero (originea) este zero absolut (respectiv temperatura pentru care randamentul ciclului reversibil folosit ca mărime termometrică ar fi egal cu 1). În relațiile în care se utilizează scara Kelvin, temperatura se notează *T*. t (°C)=T (K) –273,15.

Grad Kelvin (K): unitate de temperatură în scara termodinamică absolută. Este unitate fundamentală de temperatură în S.I. (un grad Kelvin = un grad Celsius.) T °K = t °C + 273,15

Scara de temperatură Rankine: scară de temperatură asemănătoare scării termodinamice absolute bazată însă pe zero absolut al scării Fahrenheit, astfel că 0° Rankine = – 459,69°F. (Utilizată în țările anglo-saxone).

Scara internaționala pratică de temperatură: scară de temperatură sancționată de Convenția Generală de măsuri şi greutăți din 1948 bazată pe şase puncte fixe de definiție (puncte principale) cărora li s-au atribuit valori considerate exacte la presiune normală şi din o serie de puncte fixe secundare, valorile fiind exprimate în grade Celsius. Legătura dintre orice temperatura şi indicațiile termometrelor etalonate cu ajutorul punctelor fixe se realizează prin formele de interpolare.

Temperatura absolută (sau ***termodinamică***), temperatura exprimată pe scara termometrica absolută în grade Kelvin.

Temperatura ambiantă, temperatura mediului din jurul unui corp.

Punctul critic (***temperatura critică***), temperatura maximă la care un gaz mai poate fi lichefiat prin comprimare.

Temperatura de radiație, temperatura pe care trebuie s-o aiba un corp negru pentru a prezenta aceeaşi radiație cu un corp dat; este mai mică decât temperatura absolută a corpului.

Temperatura normală, valoare a temperaturii stabilită în mod convențional: temperatura normală fizică este 0°C, iar temperatura normală tehnică este 20°C.

Temperatura de aprindere, temperatura minimă la care trebuie încălzit un amestec combustibil într-un motor pentru ca arderea, începută într-un anumit punct, să se poata extinde în toata masa de amestec. Ea depinde de felul combustibilului, de temperatura mediului înconjurător, de cantitatea de aer introdusă în motor etc. şi este cuprinsă între 200 şi 800^0C.

Temperatura de ardere, temperatura pe care o au produsele unei arderi când dezvolta căldură totală de ardere şi care este mai înaltă decât temperatura de aprindere.

Temperatura critică, temperatura-limită la care se produce (începe sau se termină) o schimbare de fază într-un metal sau într-un aliaj.

Fizicieni care au studiat în domeniul temperaturii:

- Andres **Celsius**, (1704 – 1744), astronom şi fizician suedez. Membru al Academiei de Ştiinţe din Stokholm. Cunoscut pentru scara termometrică centezimală care îi poartă numele.
- William Thomson, lord **Kelvin** (1824 – 1907) fizician englez. Membru al Societăţii Regale din Londra. Contribuţii importante în domeniile termodinamicii şi electromagnetismului. A dat una din formulările principiului al doilea al termodinamicii şi a stabilit scara de temperatură care îi poartă numele. În 1852 a descoperit împreună cu J. P. Joule, efectul Joule – Thomson, care şi-a găsit aplicaţii în lichefierea gazelor. În 1856, a descoperit unul dintre efectele termoelectrice. A elaborat teoria circuitelor electrice rezonante şi a participat la realizarea primului cablu telegrafic transatlantic.
- Gabriel Daniel **Fahrenheit**, (1686 – 1736), fizician german. A construit primul termometru cu mercur în 1714 – 1715 şi scara termometrică care îi poartă numele. A pus în evidenţă fenomenul de subrăcire la apa (1721).
- William John Macquorn **Rankine**, (1820 – 1872), inginer şi fizician scoţian. A fost profesor la Universitatea din Glasgow. Rankine este unul dintre fondatorii termodinamicii tehnice. În 1850, independent de Clausius, a elaborat, pe baza legilor termodinamicii, teoria generală a ciclurilor de funcţionare a motarelor termice şi a studiat ciclul teortic al instalaţiei de forţă cu abur, cunoscut sub denumirea de ciclu Rankine.
- René Antoine Ferchault **Réaumur**, (1683 – 1757), fizician şi naturalist francez; a fost membru al Academiei de Ştiinţe din Paris. Este cunoscut în deosebi pentru termometrul sau cu alcool, care a dat numele unei scări termometrice mult utilizate până de curand. Ca naturalist, Réaumur a studiat nevertebratele, în special insectele.

CONDUCŢIA CĂLDURII

Printr-o bară de lungime L şi aria secţiunii transversale S, cu un capăt la temperatura mare T_1 şi celălalt capăt la temperatura mică T_2, va trece un flux termic (căldură transportată în unitatea de timp) P_T direct proporţional cu aria secţiunii barei S şi diferenţa de temperatură $\Delta T=T_1-T_2$ dintre capetele barei şi invers proporţional cu lungimea ei L:

$$P_T = \lambda \cdot S \cdot \Delta T/L \qquad (1)$$

unde λ este o constantă de proporţionalitate care depinde de materialul din care este executată bara, numită ***conductivitate termică***. Unităţile de măsură sunt:

$$[P_T]_{SI} = [dQ/dt]_{SI} = J/s = W \qquad [\lambda]_{SI} = W/(m\cdot°C)$$

unde gradele pot fi Celsius sau Kelvin (fiindcă este o diferenţa de temperatură).

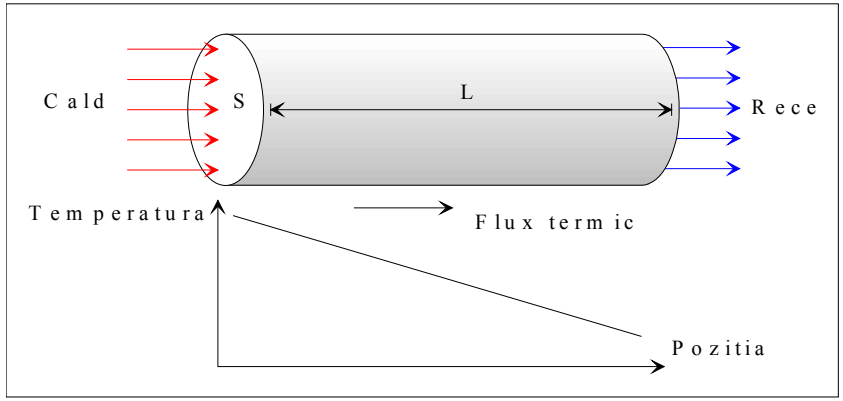


Figura 1. Propagarea căldurii într-un corp cu extremităţile aflate la temperaturi diferite.

Se poate stabili o relaţie asemănătoare legii lui Ohm din electricitate:

$$R_T = \Delta T/P_T \qquad (2)$$

unde: $R_T = L/(S\cdot\lambda)$ este ***rezistenţa termică*** $[R_T]_{SI} = °C/W$;
ΔT este diferenţa de temperatură (diferenţei de potenţial);
P_T este curentul (fluxul) termic, echivalentul curentului electric.

Exemple numerice

1. Ştiind λ=0,8 W/(m·K), conductivitatea termică a cărămizilor unui zid cu înălţimea H=3m, lungimea ℓ=5m şi grosimea g=0,4m , să se afle rezistenţa termică a lui:

$$R_T = g/(H \cdot l \cdot \lambda) = 1/30\ ^oC/W \cong 0{,}033\ °C/W$$

2. Ce flux termic se pierde prin acest perete iarna când temperatura afară este t_{ext}= –10 °C, iar în cameră avem t_{int} = 20 °C ?

$$P_T = \Delta T/R_T = (t_{int} - t_{ext})/R_T = 30\ °C / 0{,}033\ °C/W = 900\ W$$

3. Ce energie se consumă timp de o lună din această cauză ?

$$Q=P_T\cdot t = 900\ W \cdot 30\ zile \cdot 24\ h/zi \cdot 3600\ s/h =$$
$$= 900W \cdot 2{,}592 \cdot 10^6\ s = 2{,}3328 \cdot 10^9\ J$$

4. Cât gaz metan (putere calorică q = 35,5 MJ/m^3) trebuie ars pentru a produce acestă energie ?

$$Q = q\cdot V \ \Rightarrow\ V = Q/q = 2{,}3328 \cdot 10^9\ J/(35{,}5\cdot 10^6\ J/m^3) = 65{,}7\ m^3\ CH_4$$

Unităţi de măsură ale energiei:

$1\ kW{\cdot}h = 10^3\ W \cdot 3{,}6 \cdot 10^3\ s = 3{,}6 \cdot 10^6\ J$

$1\ G\ cal = 10^9\ cal = 4{,}18 \cdot 10^9\ J \qquad (=1{,}16 \cdot 10^3\ kW{\cdot}h)$

5. Cât gaz metan (putere calorică q = 35,5 MJ/m^3) trebuie ars pentru a produce 1 Gcal ?

$V= Q/q = 4{,}18 \cdot 10^9\ J/(35{,}5{\cdot}10^6\ J/m^3) = 117{,}88\ m^3\ CH_4$.

6. Cât gaz metan (putere calorică q = 35,5 MJ/m^3) trebuie ars pentru a produce 1 kW h ?

$V= Q/q = 3{,}6 \cdot 10^6\ J/(35{,}5{\cdot}10^6\ J/m^3) = 0{,}101\ m^3\ CH_4$.

PREȚURI 18 000 lei/$

Energie	Preț comrcial	Conversie	Preț/MJ	raport
Electrică	600 lei/kWh	1kWh = 3,60 MJ	166,6 lei/MJ	r=6,57
Termică	270 klei/Gcal.	1Gcal = 4185 MJ	64,52 lei/MJ	r=2,54
Metan	900 lei/m^3 CH_4	1m^3 CH_4 = 35,5 MJ	25,35 lei/MJ	r=1

7. Care este rezistența termică a unui strat de vată minerală cu conductivitatea termică λ = 0,05 W/(m K) şi grosimea de g' = 3 cm aplicat pe perete (H=3m, ℓ=5m) ?

$R_T' = g'/(H \cdot l \cdot \lambda) = 0{,}04\ °C/W$

8. Ce flux termic se pierde iarna când temperatura afară este $t_{ext} = -10$ °C, iar în cameră $t_{int} = 20$ °C, prin acest perete izolat termic?

$P_T = \Delta T/(R_T+R_T') = (t_{int}-t_{ext})/(R_T+R_T') = 30^oC/0{,}0733\ ^oC/W = 409{,}1\ W$

Concluzie =>3 cm de vată minerală (polistiren expandat,etc.) izolează termic mai bine decât 40 cm de perete din cărămidă !

Pierderile de căldură sunt **reduse la jumătate**, implicit **costurile** !

	Cond. termică	Densitate	Căld. specif.	Căld.volumică
MATERIAL	[W/(m K)]	[kg/m^3]	[J/(kg K)]	[10^6 J/(m^3 K)]
Zidărie	0,8	1700	880	
Cărămidă	0,8	1900	880	1,64
Lemn	0,3	820	2390	
Cauciuc	0,15	1200	1380	
Vată sticlă	0,05	200		
Plută	0,05	190		
Aer	0,025			
Bitum	0,09			
Fier	80	7900	450	3,55
Aluminiu	226	2700	880	2,37
Cupru	390	8960	380	3,4
Porțelan	1,6			
Al_2O_3	30			
Apa	0,58	1000	4185	4,185

9. Conducție termică, transfer prin convecție (Krasnoshchenkov – Problems in heat transfer, Editura Mir, p188)

Bară din Cu D=15mm, răcită cu aer w_{aer} = 1m/s, t_{aer} = 20°C

Calculează coeficientul de transfer termic şi I_{max} cu condiția $t_{max} \le 80^oC$, rezistivitatea Cu r=0,0175 $\Omega{\cdot}mm^2/m$.

Pentru t_{aer} = 20°C avem:

vâscozitatea ν=15,06 m^2/s;

conductivitatea termică λ=2,59 W/(m$^2{\cdot}^o$C)

coeficientul de transfer termic $\alpha = Nu{\cdot}\lambda/d$

numărul Nusselt $Nu=0{,}44{\cdot}Re^{0,5}$ dacă $10 \le Re \le 10^3$

numărul Nusselt $Nu=0{,}22{\cdot}Re^{0,6}$ dacă $10^3 \le Re \le 2{\cdot}10^5$

numărul Reynolds $Re = w{\cdot}d/\nu$

$$\alpha{\cdot}(t_{Cu} - t_{aer}){\cdot}\pi{\cdot}d{\cdot}L = I^2{\cdot}R$$

Răspuns: α=23,8W/(m$^2{\cdot}^o$C); I=825A

Răspunsul unui termometru

Timpul de răspuns al termometrului (în cât timp acesta ajunge la temperatura mediului de măsurat) se află din ***ecuația de bilanț termic***:

căldura acumulată de termometru [H·dT] =

= căldura schimbată cu mediul măsurat [G'·(T'–T)·dt] +

+ căldura schimbată cu mediul ambiant [G"·(T"–T)·dt]

care este $\rightarrow\ H \cdot dT/dt = G'{\cdot}(T'-T) + G''{\cdot}(T''-T)$ (23)

unde: T – temperatura termometrului;
T' – temperatura mediului măsurat;
T"– temperatura mediului ambiant;
H=m·c – capacitatea termică a termometrului;
G' – conductanța termică mediu de măsurat-termometru;

G"– conductanța termică mediu ambiant-termometru;
t – timpul.

Soluția ecuației este: → $T(t)= T_\infty - (T_\infty - T_o)\cdot e^{-t/\tau}$ (24)

unde: T_o – temperatura inițială a termometrului, la t = 0 ;
$T_\infty = (G'\cdot T'+G''\cdot T'')/(G'+G'')$ –temperatura finală, la t = ∞ ;
$\tau = H/(G'+G'')$ – constanta de timp.

Eroarea făcută la măsurarea temperaturii:

$$\Delta T = T' - T_\infty = (T'-T'')\cdot G''/(G'+G'') \qquad (25)$$

este cu atât mai mică cu cât G" (conductanța termică spre exterior) este mai mică comparativ cu G' (conductanța termică către mediul de măsurat). Dorim să avem G"<<G'.

Timpul necesar pentru atingerea temperaturii de echilibru este:

$3\cdot\tau$ cu eroare de $e^{-3} \cong 5\%$
$5\cdot\tau$ cu eroare de $e^{-5} \cong 0{,}7\%$

Autoîncălzirea datorită puterii electrice disipate pe rezistența electrică R_0 prin care trece curentul I se reflectă în ecuația de funcționare ca:

$$H\cdot dT/dt = G'\cdot(T'-T) + G''\cdot(T''-T) + R_0\cdot I^2 \qquad (26)$$

având soluția limită (t→∞):

$$T_{\infty i} = T_\infty + R_0\cdot I^2/(G'+G'') \qquad (27)$$

Eroarea datorată autoîncălzirii este:

$$\Delta T = T_{\infty i} - T_\infty = R_0\cdot I^2/(G'+G'') \cong R_0\cdot I^2/G' = R'\cdot R_0\cdot I^2 \qquad (28)$$

unde R' = 1/G' este ***rezistența termică*** termometru-mediu măsurat.

Rezistența termică termometru-mediu măsurat se poate determina din două măsurători de temperatură făcute cu doi curenți diferiți:

$$T_1 = T' + R'\cdot R_1\cdot I_1^2$$
$$T_2 = T' + R'\cdot R_2\cdot I_2^2 \qquad (29)$$

de unde:

$$R' = (T_2 - T_1) / (R_2\cdot I_2^2 - R_1\cdot I_1^2) \qquad (30)$$

Relația devine mai simplă dacă putem considera $R_1 \cong R_2 \cong R_0$:

$$R' = (T_2 - T_1) / [R_0\cdot(I_2^2 - I_1^2)] \qquad (31)$$

RADIAȚIA TERMICĂ

Orice corp radiază în mediul înconjurător energie electromagnetică (unde electromagnetice) numită ***radiație termică***. Energia emisă depinde de temperatura corpului, indicând că energia internă a corpului se transformă în energie electromagnetică. Energia emisă în unitatea de timp şi pe unitatea de suprafață a corpului, ***radianța integrală*** "R", este direct proporțională cu temperatura absolută a corpului la puterea a patra (***legea Stefan – Boltzmann***):

$$R = \frac{\text{Energie}}{\text{timp} \times \text{suprafață}} = \varepsilon\cdot\sigma\cdot T^4 \qquad [R]_{SI} = W/m^2 \qquad (1)$$

unde: $\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}\ W/(m^2\cdot K^4)$, constanta Stefan - Boltzmann;
ε – emisivitatea suprafeței (0<ε<1) – depinde de material,
ε=0 corp alb; ε=1 corp negru; ε∈ (0,1) corp gri.

Dacă corpurile doar ar emite radiație termică, energia lor internă şi implicit temperatura ar tinde la zero. Fiindcă mediul înconjurător are o anumită temperatură, corpurile emit şi absorb radiație până ajung la temperatura mediului când se realizează un echilibru între radiația emisă şi cea absorbită.

Exemple

1. *Puterea radiată de corpul omenesc*:

–Suprafața corpului $S = 1\ m^2$ emisivitatea ε = 1
–Temperatura corpului t = 37°C = 310 K ($T^4 = 9{,}2\cdot10^9\ K^4$)

Puterea radiată $P = \varepsilon\sigma S T^4 = 523$ W

Trebuie să ținem seama de puterea primită de la mediul înconjurător.

–Temperatura mediului T' = 22°C = 295 K ($T'^4 = 7{,}5\cdot10^9\ K^4$)

Puterea absorbită $P' = \varepsilon\cdot\sigma\cdot S\cdot T'^4 = 425$ W

Puterea pierdută de corp = Putere radiată – Putere absorbită = 98W.

2. *Puterea radiată de Soare spre Pământ*:

Raza Soarelui $R_S = 7\cdot10^8$ m;

Raza Pământului $R_P = 6{,}4\cdot10^6$ m;

Distanța Soare – Pământ $R_{SP} = 1{,}5\cdot10^{11}$ m;

Temperatura coroanei solare T = 6000 K .

Puterea emisă de suprafața Soarelui:

$$P_S = \varepsilon\cdot\sigma\cdot S\cdot T^4 = 4\pi R_S^2\cdot\sigma\cdot T^4 = 4{,}52\cdot10^{26}\ W$$

se distribuie uniform pe o sferă cu raza R_{SP}:

$$P_S/S_{SP} = 4\pi R_S^2\cdot\sigma\cdot T^4 /(4\pi R_{SP}^2) = (R_S /R_{SP})^2\cdot\sigma\cdot T^4 = 1{,}6\cdot 10^3\ W/m^2$$

Valoarea standard a intensității radiației solare în exteriorul atmosferei:

$$I_o = 1353\ W/m^2\ (NASA / ASTM)$$

Atmosfera absoarbe 22% din radiație. Prezența norilor, praful în suspensie, alternanța zi-noapte şi succesiunea anotimpurilor reduce fluxul de energie la o valoare medie de circa 5 ori mai mică de 170–200 W/m^2.

Omul poate simți radiația termică din domeniul IR cu ajutorul receptorilor de temperatură din piele, putând constata că un obiect este fierbinte doar apropiind dosul mâinii de el fără a-l atinge. În comerț există dispozitive capabile să simtă prezența unui om de la o distanță de la 1 la 10 m (senzori PIR – piroelectrici). Putem evalua schimbarea de temperatură a senzorului datorită prezenței omului folosind legea Stefan – Boltzmann. Considerăm omul ca fiind o sferă radiantă cu suprafața de 1 m^2 ($r \cong 28$ cm) având temperatura T de 37 ^oC (310 K), aflată la distanța R = 10 m de senzorul cu suprafața S_s şi temperatura T_s. Mediul are temperatura $T_o = 22\ ^oC = 295$ K .

Puterea emisă suplimentar de corpul omenesc este:

$$P = 4\cdot\pi\cdot r^2\cdot\varepsilon\cdot\sigma\cdot(T^4-T_o^4)$$

care la distanța R pe unitatea de suprafață este:

$$P' = P/(4\pi R^2) = (r/R)^2\cdot\varepsilon\cdot\sigma\cdot(T^4-T_o^4)$$

de unde puterea primită prin radiație de senzor este:

$$P_{primit} = P'\cdot S_s = S_s\cdot(r /R)^2\cdot\varepsilon\cdot\sigma\cdot(T^4-T_o^4)$$

iar cea emisă suplimentar de senzor datorită încălzirii este:

$$P_{cedat} = S_s\cdot\varepsilon\cdot\sigma\cdot(T_s^4-T_o^4)$$

La echilibru cele două fluxuri de energie se egalează:

$$S_s\cdot(r /R)^2\cdot\varepsilon\cdot\sigma\cdot(T^4-T_o^4) = S_s\cdot\varepsilon\cdot\sigma\cdot(T_s^4-T_o^4)$$

Se observă că aria suprafeței senzorului se simplifică, deci ea nu contează în acest proces. Fiindcă temperaturile T_s şi T_o sunt foarte apropiate ca valoare atunci putem face următoarea aproximație:

$$T_s^4-T_o^4 = (T_s^2-T_o^2)\cdot(T_s^2+T_o^2) = (T_s-T_o)\cdot(T_s+T_o)\ (T_s^2+T_o^2) \cong$$
$$\cong (T_s -T_o)\cdot(T_o+T_o)\cdot(T_o^2+T_o^2) = 4\cdot T_o^3\cdot(T_s -T_o)$$

care poate fi aplicată chiar pentru corpul radiant (eroare<20%).

Notând cu: $\Delta T = T-T_0$ şi $\Delta T_s = T_s -T_0$

avem: $\Delta T_s = (r /R)^2\cdot(T^4-T_0^4) / (4\cdot T_0^3) \cong (r / R)^2\cdot\Delta T$

Dacă pentru simplitatea calculelor luăm r=25cm şi R =10m, $\Delta T=16^oC$, atunci:

$$\Delta T_s = 1\cdot 10^{-2}\ ^oC.$$

În practică fiind vorba de un proces dinamic (încălzirea senzorului are loc într-o fracțiune de secundă până la o secundă) această valoare este mai mică cu circa 2 ordine de mărime ($10^{-4}\ ^oC$).

Radiația unui corp incandescent trimisă către o prismă este descompusă în radiații monocromatice. Domeniul radiațiilor vizibile se poate observa cu ochiul liber. Doar folosind instrumente potrivite se poate constata prezența radiațiilor electromagnetice şi în afara domeniului vizibil, respectiv domeniul radiațiilor infraroşii (IR) cu lungimea de undă mai mare decât a celor roşii ($\lambda > 7200$ Å = 0,72 μm) şi domeniul radiațiilor ultraviolete (UV) cu lungimea de undă mai mică decât a celor violete ($\lambda < 4000$ Å = 0,4 μm).

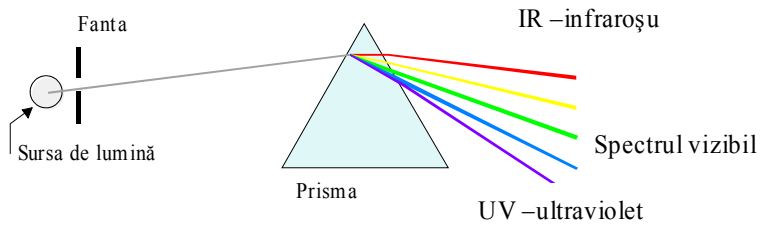


Figura 1. Radiația electromagnetică este sesizată de ochiul uman doar pentru lungimi de undă de la 0,4 la 0,7 μm, peste 0,7 μm avem radiația infraroşie (IR), iar sub 0,4 μm radiația ultravioletă (UV).

Se constată experimental că în funcție de temperatura corpului încălzit se modifică culoarea acestuia, frecvența predominantă crescând cu temperatura (*legea lui Wien*):

$$\lambda_m\cdot T = b \qquad (2)$$

unde : b – constanta lui Wien – $2{,}898\cdot 10^{-3}$ m·K,
λ_m– lungimea de undă la care apare maximul de emisie.

⇨Scara de culoare:
532 ^oC – roşu închis
747 ^oC – vişiniu,
835 ^oC – roşu deschis,
899 ^oC – portocaliu,
966 ^oC – galben,
1205 ^oC – alb.

Distribuția după lungimea de undă a radiației termice emise de un corp a fost dedusă de Max Planck în ipoteza schimbului cuantificat de energie dintre corp şi mediu:

$$W = n \cdot h \cdot \nu \qquad (3)$$

unde: W–energia schimbată
$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s –constanta lui Planck
ν –frecvența undei electromagnetice
n –numărul de cuante (1, 2, 3, 4…)

Distribuția după lungimea de undă a radiației termice este dată de ***radianța spectrală*** "R_λ" (o densitate spectrală a puterii emise pe unitatea de suprafață) şi reprezintă ***legea lui Planck***:

$$R_\lambda = \frac{2\pi \cdot h \cdot c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h \cdot c}{\lambda \cdot k \cdot T}} - 1} = T^5 \cdot \frac{2\pi \cdot k_B^5}{h^4 \cdot c^3} \cdot \frac{x^5}{e^x - 1} \qquad (4)$$

unde: $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K –constanta Boltzmann
$c = 3 \cdot 10^8$ m/s –viteza luminii
$\lambda = c/\nu$ –lungimea de undă a radiației
$x = hc/(\lambda \cdot k_B \cdot T) = h\nu/(k_B \cdot T) = 0{,}01441/(\lambda \cdot T)$ (5)

Putem calcula valoarea radianței spectrale normate:

$$R_\lambda / [2 \cdot \pi \cdot k_B^5 \cdot T^5/(h^4 \cdot c^3)] = R_\lambda / (6 \cdot 10^{-7} \cdot T^5) = x^5/(e^x - 1)\ [W/(m^2 \cdot m \cdot K^5)] \qquad (6)$$

în funcție de "x" care este proporțional cu frecvența "ν" sau de "1/x" care este proporțional cu lungimea de undă "λ", ca în tabelul alăturat.

$x \sim \nu$	$1/x \sim \lambda$	$x^5/(e^x-1) \sim R_\lambda / T^5$
0,1	10	$9{,}508 \cdot 10^{-5}$
0,2	5	$1{,}445 \cdot 10^{-3}$
0,5	2	$4{,}817 \cdot 10^{-2}$
1	1	$5{,}82 \cdot 10^{-1}$
2	0,5	5
5	0,2	21,2
10	0,1	4,54
20	0,05	$6{,}595 \cdot 10^{-3}$
30	0,033	$2{,}27 \cdot 10^{-6}$
50	0,02	$6{,}027 \cdot 10^{-14}$

În figura 2 avem graficul radianței spectrale normate în funcție de "1/x". Se observă scăderea rapidă a densității spectrale de radiație către lungimi de undă scurte $1/x \to 0$ (energii mari ale fotonilor, cuantele radiației electromagnetice).

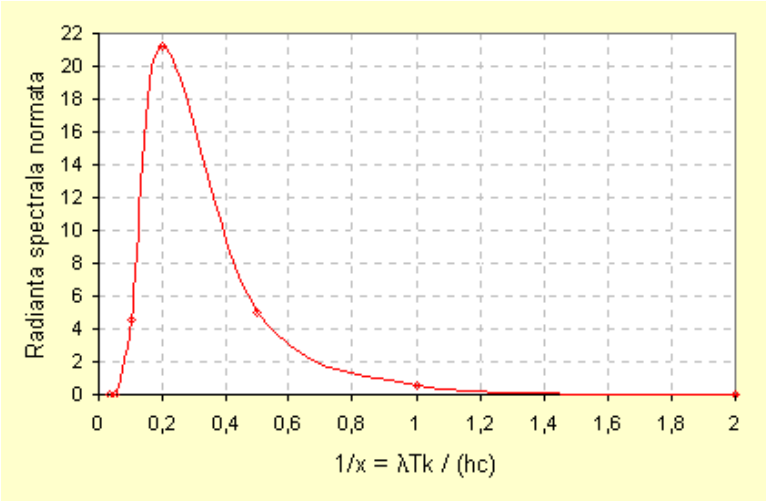


Figura 2. Graficul radianței spectrale normate "Rλ/(6·10–7·T5)" în funcție de "1/x= λ·kB·T/ (hc)", practic lungimea de undă normată.

În reprezentare dublu logaritmică a radianței spectrale, figura 3, se vede şi mai clar scăderea mai rapidă a densității spectrale de radiație către lungimile de undă scurte şi mai puțin rapidă către lungimile de undă mari.

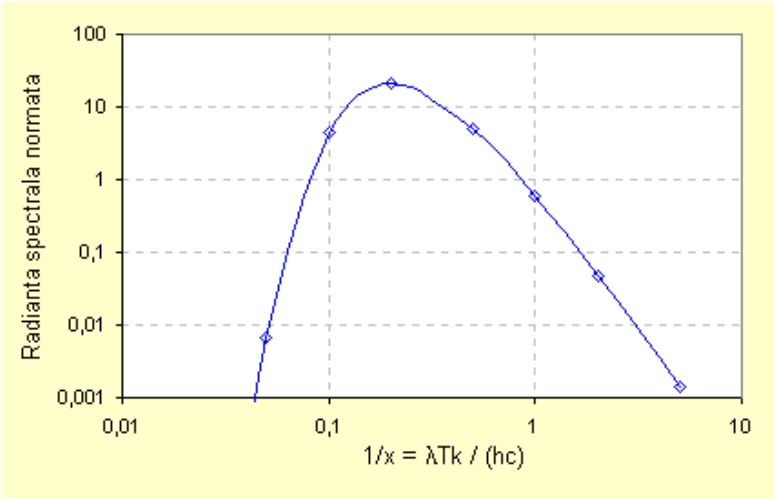


Figura 3. Graficul în scală dublu logaritmică al radianței spectrale normate "$R_\lambda/(6 \cdot 10^{-7} \cdot T^5)$" în funcție de "$1/x = \lambda \cdot k_B \cdot T/(hc)$", practic lungimea de undă normată.

De reţinut maximul radianţei spectrale pentru x=5, corespunzător legii lui Wien. Din tabelul 1 se poate calcula radianţa spectrală corespunzătoare unui corp cu temperatura T, în funcţie de lungimea de undă a radiaţiei după metoda descrisă mai jos.

Aleg T ⇨ 3000K
Din coloana 1/x ⇨ λ (μm) = (14410/T)·(1/x)
Din coloana $x^5/(e^x-1)$ ⇨ R_λ (W/(m²·μm))= $6\cdot10^{-13}\cdot T^5\cdot[x^5/(e^x-1)]$

λ (μm)	1/x ~ λ	$x^5/(e^x-1) \sim R_\lambda / T^5$	R_λ (W/(m²·μm))	
12	2	$4{,}817\cdot10^{-2}$	$7\cdot10^{3}$	
4,8	1	$5{,}82\cdot10^{-1}$	$8{,}5\cdot10^{4}$	
2,4	0,5	5	$7{,}3\cdot10^{5}$	0,236
1,92	0,4	8,733	12,7	0,41
1,44	0,3	15,22	22,2	0,718
0,96	0,2	21,2	$30{,}9\cdot10^{5}$	1
0,72	0,15	16,78	24,4	0,79
0,66	0,1374	14,1	20,5	0,663
0,6	0,124913	10,97	16	0,518
0,576	0,12	9,66	14,1	0,45
0,48	0,1	4,54	$6{,}6\cdot10^{5}$	0,213
0,24	0,05	$6{,}595\cdot10^{-3}$	$9{,}6\cdot10^{2}$	

Exemple

Să calculăm maximul radianţei spectrale la temperatura de 27°C, T=300K:

$$R_{\lambda max} = T^5\cdot6\cdot10^{-7}\cdot21{,}2=T^5\cdot1{,}28\cdot10^{-5}\ W/(m^2\cdot m)$$

$$R_{\lambda max} = 31{,}1\ W/(m^2\cdot\mu m)$$

Fiindcă:

$$R_\lambda = T^5\cdot[2\cdot\pi\cdot k_B^5/(h^4\cdot c^3)]\cdot x^5/(e^x-1)$$

$$x=hc/(\lambda\cdot k_B\cdot T) = h\nu/(k_B\cdot T)$$

la lungimi de undă mici (energie mare a fotonului, x>5) putem aproxima:

$$1/(e^x-1) \cong 1/e^x = e^{-x}$$

obţinând legea lui Wien:

$$R_\lambda = T^5\cdot[2\cdot\pi\cdot k_B^5/(h^4\cdot c^3)]\cdot x^5\cdot e^{-x} = T^5\cdot x^5\cdot e^{-x}\cdot6\cdot10^{-7}\ W/(m^2\cdot m)$$

iar la lungimi de undă mari (energie mică a fotonului, x<0,3) putem aproxima:

$$1/(e^x-1) \cong 1/x$$

obţinând legea lui Rayleigh-Jeans:

$$R_\lambda = T^5\cdot[2\cdot\pi\cdot k_B^5/(h^4\cdot c^3)]\cdot x^4 = T^5\cdot x^4\cdot6\cdot10^{-7}\ W/(m^2\cdot m)$$

Formula barometrică şi distribuţia Boltzmann

Presiunea atmosferică "p" variază cu înălţimea "h" după legea:

$$p = p_o\cdot e^{-M\cdot g/(R\cdot T)} \qquad (1)$$

unde: p_o – presiunea atmosferică la nivelul mării (h=0);
g – accelerația gravitațională;
h – altitudinea;
M – masa molară a gazului;
R – constanta universală a gazelor [8310 J/ (kmol·Kelvin)]
T – temperatura gazului.

Din teoria cinetico-moleculară a gazelor presiunea este:

$$p = (2/3)\ n\ m\langle v^2\rangle/2 = (2/3)\ n\ (3/2)k_B\ T = n\ k_B\ T \qquad (2)$$

unde: n –numărul de molecule din unitatea de volum (densitate de particule);
m –masa unei molecule [m= M/N_A =masa molară/număr Avogadro];
$\langle v^2\rangle$ –viteza pătratică medie a moleculelor;
k_B –constanta Boltzmann [$k_B = R/N_A$].

În condiţii izoterme relaţia presiunii va fi:

$$n = n_o\ e^{-mgh/(kT)} \qquad (3)$$

unde: n_o – este densitatea de particule la h=0, iar
n – densitatea de particule la înălţimea h.

Dacă ne închipuim că până acum am lucrat cu un gaz închis într-un cilindru foarte înalt de înălţime h şi modificăm forma cilindrului făcându-l foarte plat, înălţime mică şi suprafaţă mare, fără a-i modifica volumul şi nici temperatura gazului atunci formula (3) poate fi scrisă ca:

$$n = n_o\cdot e^{-W/(kT)} \qquad (4)$$

unde W este de data asta energia unei molecule. Formula (12) dedusă de Boltzmann mult mai riguros ne spune câte molecule din gaz au energia W, altfel formulat ***distribuţia moleculelor după energie***.