

FLUIDE IDEALE

Statica fluidelor

Presiunea statică.

Noțiunea de presiune este asociată de obicei fluidelor, lichide sau gaze. Presiunea " p " este definită ca forța " F ", *perpendiculară* pe suprafață, divizată cu aria suprafeței " A ", sau forța pe suprafața unitate:

$$p = \frac{F}{A} \text{ unitate de măsură } [p]_{SI} = \text{N/m}^2 (\text{Pa, Pascal}) \quad (1)$$

Datorită greutatei lichidului dintr-un recipient în punctul P (figura 1) aflat la adâncimea " h " se crează **presiunea hidrostatică**:

$$p = G/A = \rho \cdot g \cdot h \cdot A/A = \rho \cdot g \cdot h \quad (2)$$

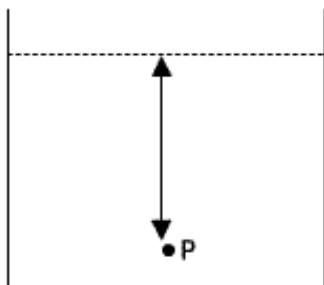


Figura 1. Presiunea în orice punct dat într-un lichid închis este determinată de densitatea lichidului și de distanța de la punctul dat la suprafață.

unde: h = distanța de la suprafață la punct;
 g = accelerația gravitațională ($9,81 \text{ m/s}^2$)
 $\rho = m/V$ (densitate = masa /volum) $[\rho]_{SI} = \text{kg/m}^3$. (3)

Pentru deducerea formulei ne-am folosit de faptul că forța de greutate este:

$$G = m \cdot g$$

iar masa de lichid aflată deasupra punctului P se determină ca:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot h \cdot A$$

Astfel densitatea lichidului determină presiunea p exercitată la o adâncime dată. Mercurul, care este de 13,63 ori mai dens decât apa ($\rho_{\text{apa}} = 1000 \text{ kg/m}^3$), va exercita o presiune de 13,63 ori mai mare decât apa la aceeași adâncime față de suprafața liberă.

Notă! Relația se poate fi folosi pentru a determina nivelul lichidului dintr-un recipient măsurând presiunea la baza recipientului. Înălțimea coloanei de lichid se va calcula cu formula:

$$h = p / (\rho \cdot g) \quad (4)$$

Exemplu. La baza unui turn de apă se măsoară o presiune de 54 kPa. Știind densitatea apei $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, înălțimea coloanei de apă va fi:

$$h = p / (\rho \cdot g) = 54 \cdot 10^3 / (1000 \cdot 9.8) = 5.51 \text{ m}$$

Denivelarea coloanei de lichid dintr-un tub în formă de "U" este utilizată pentru măsurarea presiunilor relative (față de presiunea atmosferică) cu *manometrul cu lichid* folosind relația (2), $p = \rho \cdot g \cdot h$. În partea dreaptă a tubului în formă de "U" presiunea atmosferică care acționează pe suprafața lichidului se însumează cu presiunea datorată nivelului coloanei de lichid, la adâncimea H, vezi figura 2. În partea stângă a tubului, la același nivel, acționează pe suprafața liberă doar presiunea " p ". Din egalarea celor 2 presiuni, din stânga și din dreapta la același nivel:

$$p = p_{\text{atm}} + \rho \cdot g \cdot H$$

găsim presiunea relativă:

$$p - p_{\text{atm}} = \rho \cdot g \cdot H$$

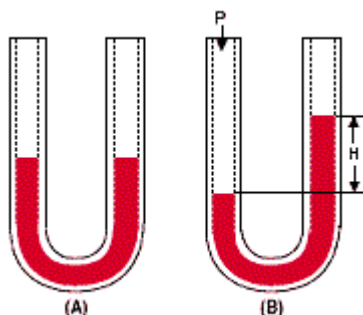


Figura 2. Manometrul cu lichid

Exemplu. Suflând în partea stângă a manometrului producem o denivelare de 25 cm, coloană de apă. Presiunea generată este:

$$p - p_{\text{atm}} = \rho \cdot g \cdot H = 1000 \cdot 9.8 \cdot 25 \cdot 10^{-2} = 2450 \text{ Pa}$$

Formula barometrică

Gazele diferă de lichide din două puncte de vedere: sunt foarte compresibile și umplu complet orice vas închis în care sunt plasate. Variația neliniară cu altitudinea a presiunii aerului, arătată în figura 3a este un exemplu al efectului compresibilității gazelor. Sub formă diferențială relația presiunii hidrostatice (2) pentru aer este:

$$dp = - \rho \cdot g \cdot dh \quad (5)$$

Semnul "−" apare fiindcă "h" e înălțime, nu adâncime.

Din *ecuația termică de stare* a aerului aflăm densitatea aerului:

$$p \cdot V = R \cdot T \cdot m/M \Rightarrow p = \rho \cdot R \cdot T/M \Rightarrow \rho = p \cdot M / (R \cdot T) \quad (6)$$

Înlocuind densitatea "ρ" în relația (5) găsim modul în care variază presiunea cu înălțimea:

$$dp/p = - dh \cdot M \cdot g / (R \cdot T) \Rightarrow \ln(p/p_0) = - M \cdot g \cdot h / (R \cdot T) \quad (7)$$

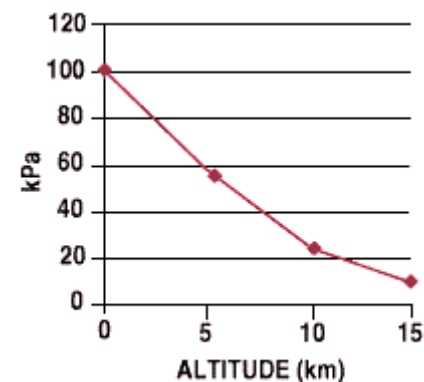


Figura 3a. Compresibilitatea gazelor este ilustrată prin presiunea aerului ca funcție neliniară de altitudine.

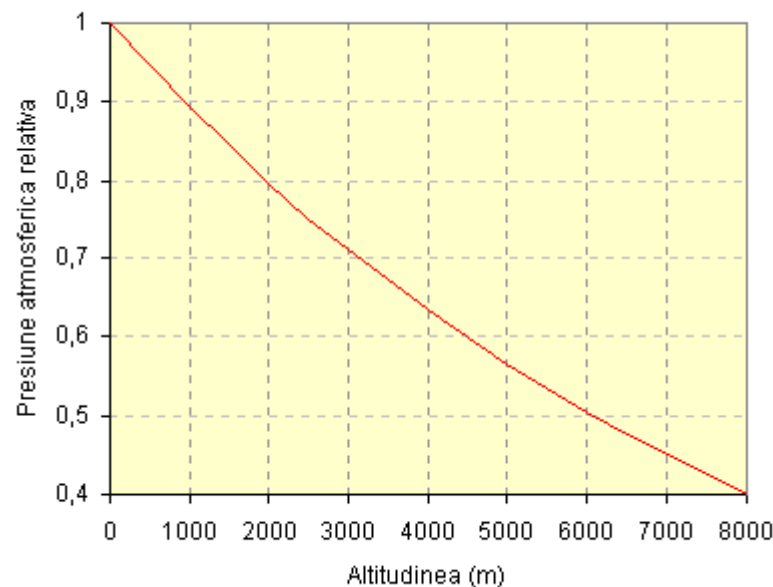


Figura 3b. Presiunea atmosferică relativă în funcție de altitudine calculată cu relația (8')

Formula presiuni atmosferice în funcție de altitudine va fi:

$$p = p_o \cdot e^{-M \cdot g \cdot h / (R \cdot T)} \quad (8)$$

unde: R – constanta universală a gazelor (8310 J/(kmol·K))

T – temperatura gazului în grade Kelvin ($T=273+t$ (°C))

M – masa molară (pentru aer ~ 29 kg/kmol)

p_o – presiunea atmosferică la nivelul mării ($h=0$, $p_o=101$ kPa)

Folosind constantele numerice date și o temperatură de 27°C putem calcula mărimea:

$$h' = R \cdot T / (M \cdot g) = 8763 \text{ m}$$

și apoi presiunea atmosferică relativă " p/p_o " ca funcție de altitudine:

$$p/p_o = e^{-h/h'} \quad (8')$$

Atmosfera standard $H(m) = 8000 \cdot \lg(p_o/p)$; $\Delta t = -6,5^\circ\text{C}/1000\text{m}$

Altitudine (m)	p/p_o	ρ/ρ_o	t (°C)
0	1	1	15
1000	0,887	0,907	8,5
2000	0,784	0,822	2
3000	0,692	0,742	-4,5
4000	0,608	0,669	-11
5000	0,533	0,601	-17,5
6000	0,465	0,538	-24
7000	0,405	0,481	-30,5
8000	0,351	0,428	-37
9000	0,303	0,381	-43
10000	0,261	0,337	-50

Legea lui Arhimede. Plutirea corpurilor

Principiul lui Arhimede: un corp cufundat parțial sau total într-un lichid, este împins în sus de o forță egală cu greutatea lichidului dezlocuit. Pe suprafața de sus a corpului paralelipipedic cu aria bazei A și înălțimea L , cufundat într-un container cu lichid (figura 4), se exercită o forță descendentă:

$$F_1 = p_{\text{sus}} \cdot A = \rho \cdot g \cdot h \cdot A \quad (9)$$

iar pe suprafața de jos se exercită forța ascendentă:

$$F_2 = p_{\text{jos}} \cdot A = \rho \cdot g \cdot (h+L) \cdot A \quad (10)$$

Forța rezultantă:

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho \cdot g \cdot A \cdot L \quad (11)$$

este egală cu greutatea lichidului dezlocuit, fiindcă produsul " $A \cdot L$ " reprezintă volumul corpului și deci volumul lichidului dezlocuit, care apoi e înmulțit cu densitatea lichidului și accelerația gravitațională.

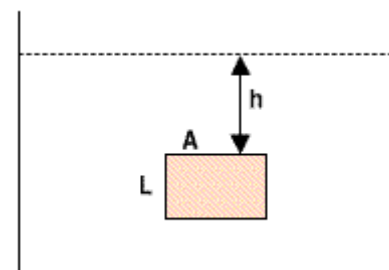


Figura 4. Conform principiului lui Arhimede, un obiect cufundat într-un lichid va fi împins spre suprafață de greutatea lichidului dezlocuit.

Un corp cufundat total într-un lichid va simți două forțe principale, greutatea, $G=mg$, și forța arhimedică $F_A = \rho \cdot V_c \cdot g$, unde ρ e densitatea lichidului, iar V_c este volumul corpului. Forța totală pe care o va simți corpul va fi o *greutate aparentă* G_a :

$$G_a = G - F_A = mg - \rho \cdot V_c \cdot g = (\rho_c - \rho) V_c g$$

unde ρ_c este densitatea corpului. Cântărind un corp în aer și în apă putem afla densitatea sa și astfel rezolvăm antica problemă a lui Arhimede: dacă coroana regelui conține proporția corectă de aur și argint.

Fiindcă într-un lichid practic nu apar forțe de forfecare transmiterea presiunii lichidului se face perpendicular pe suprafața vasului în care se află. Fenomenul se vede cu ușurință prin găurirea containerului cu apă și observând cursul jetului prin orificiu (figura 5). Jetul va țâșni întotdeauna perpendicular față de peretele vasului. Acest fapt este important în construcția barajelor (digurilor) ce trebuie să reziste forței apei. Peretele barajului nu este vertical în partea dinspre apă, are o pantă care face ca presiunea apei să genereze o forță înclinată în jos, sporind stabilitatea construcției.

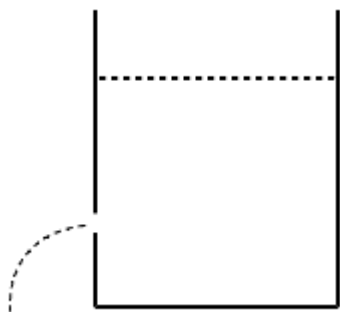


Figura 5. Presiunea lichidului este normală la suprafață, după cum se observă în urma perforării vasului.

Problemă

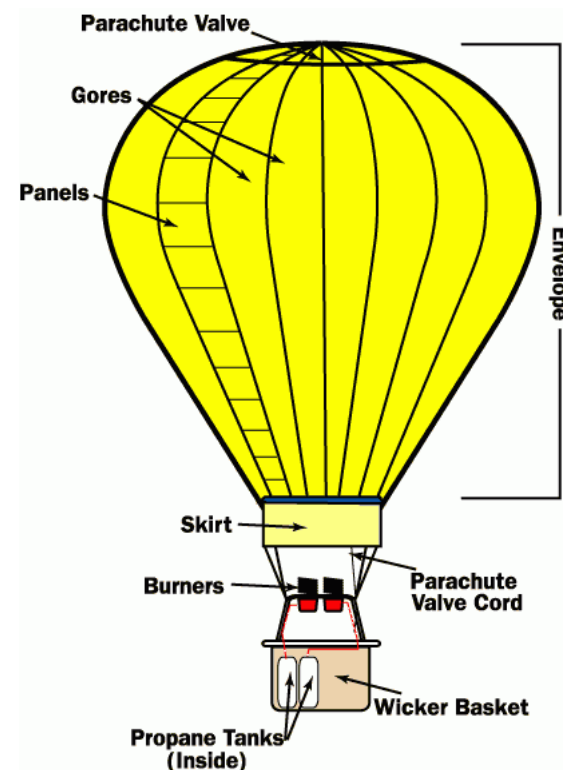
Un corp paralelipipedic cu $L=25\text{cm}$, $l=10\text{cm}$, $h=5\text{cm}$ și densitatea $d=800\text{kg/m}^3$ este așezat în apă $d_a=1000\text{kg/m}^3$.

- Ce volum rămâne în aer?
- În ce poziție va avea stabilitatea maximă? [când e minimă energia potențială]

Balonul cu aer cald

Sursa principală: http://en.wikipedia.org/wiki/Hot_air_balloon

Un aparat de zbor care utilizează forța arhimedică este balonul cu aer cald, creat în 1782 de frații Montgolfier. Părțile sale componente sunt: balonul propriu-zis, sursa de căldură (arzătorul cu propan, uzual) și nacela (gondola sau coșul) în care stau oamenii. De menționat că principiul de zbor era cunoscut de chinezi (anul 220-280, lanternele Kongming) și fusese prezentat în 1709 regelui portughez de Bartolomeu de Gusmão.



Structura unui balon cu aer cald

Un balon cu aer cald este realizat din țesătură de nylon sau dacron (poliester), impermeabilizată cu silicon sau poliuretan. Lângă arzător,

balonul este realizat dintr-un material rezistent la temperaturi ridicate (Nomex - o aramidă (plastic), din familia Kevlar-ului). Temperatura aerului cald este limitată la maximum 120°C. În condiții atmosferice normale (20°C), un volum de 4 m³ de aer la 99°C ridică circa un kilogram (generează o forță ascensională corespunzătoare greutateii unei mase de 1kg).

Folosind *ecuația termică de stare* a aerului găsim dependența de temperatură a densității aerului:

$$\rho = pM/(RT) = (T_0/T) pM/(RT_0) = \rho_0 T_0/T$$

Forța ascensională generată de aerul cald apare ca o diferență între greutatea aerului rece (ρ_0) dezlocuit (forța Arhimedică) și greutatea aerului cald (ρ):

$$F_{\text{ascens}} = F_{\text{Arh}} - G = \rho_0 Vg - \rho Vg = (\rho_0 - \rho) Vg = (1 - T_0/T) \rho_0 Vg$$

Când este mai ușor de zburat cu balonul, când e rece sau când e cald afară?

Tabel cu masa ridicată de 1000 m³ de aer în funcție de temperatura lui (sferă cu raza $R \approx 6.2\text{m}$).

Temperatura aerului	Densitatea aerului	Masa aerului	Masa ridicată
20°C	1.2041 kg/m³	1204.1 kg	0 kg
99 °C	0.9484 kg/m³	948.4 kg	255.7 kg
120 °C	0.8977 kg/m³	897.7 kg	306.4 kg

Putem genera o forță ascensională și mai mare dacă în loc de aer cald folosim un gaz ușor ca hidrogenul ($\rho = 0.090 \text{ kg/m}^3$, $M = 2 \text{ kg/kmol}$, inflamabil!) sau mai bine heliul ($\rho = 0.179 \text{ kg/m}^3$, $M = 4 \text{ kg/kmol}$) care nu este inflamabil. Folosind *ecuația termică de stare* (vezi mai sus)

se arată simplu că raportul densităților a 2 gaze este dat de raportul maselor lor molare (în aceleași condiții de presiune și temperatură):

$$\rho/\rho_0 = M/M_0 = 4/29 \text{ (heliu/aer)}$$



Baloanele pentru o singură persoană, fără coș ("Cloudhoppers" sau "Hoppers"), au un volum de circa 600 m³ (sferă cu raza $>5\text{m}$).

Balon individual (Cloud Hopper)



Legea lui Pascal. Transmiterea presiunii

Legea lui Pascal prevede că dacă există o creștere a presiunii pe o porțiune din suprafața lichidului, atunci o creștere identică va exista în orice alt punct din acel lichid. Acest principiu este utilizat în cazul sistemelor hidraulice cum ar fi cricurile și frânele hidraulice ale automobilelor sau presa hidraulică. Este echivalentul fluidic al principiului pârghiei, care produce forțe mari folosind deplasări mari cu pistoane mici ce mișcă pistoane mari pe distanțe mici (figura 6).

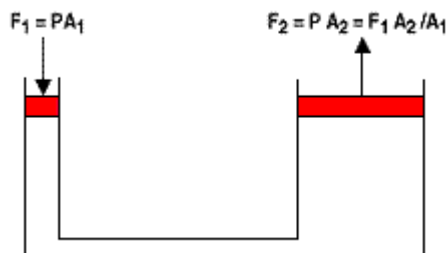


Figura 6. Potrivit legii lui Pascal, o creștere a presiunii pe suprafața lichidului determină o creștere similară în orice alt punct din acel lichid.

Presiunea este aceeași în tot lichidul:

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \text{consecință} \quad F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} \quad (12)$$

Ținând cont de relația (12) și de conservarea volumului de lichid:

$$A_1 \cdot x_1 = A_2 \cdot x_2 \Rightarrow \frac{A_2}{A_1} = \frac{x_1}{x_2}$$

găsim că *energia se conservă*, adică lucrul mecanic al pistonului mic (din stânga) este egal cu cel din dreapta (pistonul mare):

$$F_1 \cdot x_1 = F_2 \cdot x_2 \quad (13)$$

Distribuția Boltzmann (temă suplimentară, nivel avansat)

Presiunea atmosferică "p" variază cu înălțimea "h" după legea:

$$p = p_0 \cdot e^{-M \cdot g \cdot h / (R \cdot T)} \quad (1)$$

unde: p_0 – presiunea atmosferică la nivelul mării ($h=0$);
 g – accelerația gravitațională;
 h – altitudinea;
 M – masa molară a gazului;
 R – constanta universală a gazelor [$8310 \text{ J} / (\text{kmol} \cdot \text{Kelvin})$]
 T – temperatura absolută a gazului (grade Kelvin).

Din teoria cinetico-moleculară a gazelor presiunea este:

$$p = (2/3) n m \langle v^2 \rangle / 2 = (2/3) n (3/2) k \cdot T = n \cdot k \cdot T \quad (2)$$

unde: n – numărul de molecule din unitatea de volum
 m – masa unei molecule, M/N_A , masa molară/număr Avogadro
 $\langle v^2 \rangle$ – viteza pătratică medie a moleculelor;
 k – constanta Boltzmann [$k = R/N_A$].

În condiții izoterme, din relația presiunii (1) folosim relația (2) găsim:

$$n = n_0 \cdot e^{-mgh / (kT)} \quad (3)$$

unde: n_0 – este densitatea de particule la $h=0$, iar
 n – densitatea de particule la înălțimea h .

Dacă ne închipuim că până acum am lucrat cu un gaz închis într-un cilindru foarte înalt de înălțime h și modificăm forma cilindrului făcându-l foarte plat, înălțime mică și suprafață mare, fără a-i modifica volumul și nici temperatura gazului atunci formula (3) poate fi scrisă ca:

$$n = n_0 \cdot e^{-W / (kT)} \quad (4)$$

unde W este de data asta energia unei molecule. Formula (4) dedusă de Boltzmann mult mai riguros ne spune câte molecule din gaz au energia W , altfel formulat **distribuția moleculelor după energie**.

Dinamica fluidelor

Ecuația de continuitate

La fluidele incompresibile, în primul rând lichidele, dar în multe cazuri și gazele, *conservarea masei* este echivalentă cu *conservarea volumului*: cât fluid intră pe o parte a conductei, tot atât iese.

Aplicăm acest principiu pentru două secțiuni prin conductă și un interval de timp Δt :

$$V_1 = V_2. \Rightarrow S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t = S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t \quad (1)$$

simplificând cu Δt obținem **ecuația de continuitate**:

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2 \quad (2)$$

Această relație ne spune că **debitul volumic**, Q_v (volumul de fluid ce trece prin secțiunea transversală de arie "S" a conductei în unitatea de timp) rămâne constant de-a lungul conductei, iar mai general de-a lungul unui tub de curent:

$$Q_v = \Delta V / \Delta t = S \cdot v = \text{const.}$$

Legea lui Bernoulli

Presiunea fluidelor în mișcare. Datorită energiei cinetice a fluidului în mișcare, pe orice suprafață perpendiculară pe direcția de curgere se exercită o presiune, *presiunea dinamică* (sau *presiunea de impact*) p_d :

$$p_d = \rho \cdot v^2 / 2 \quad (3)$$

unde ρ este densitatea fluidului și v este viteza fluidului.

Existența presiunii dinamice și relația ei cu celelalte presiuni se deduce pe baza teoremei variației energiei cinetice, aplicată fluidului. Delimităm o porțiune din fluid prin intermediul a două secțiuni transversale de arie S_1 și S_2 . Asupra acestui corp fluid acționează forțele F_1 și F_2 (normale pe S_1 și S_2) create de presiunile p_1 și p_2 .

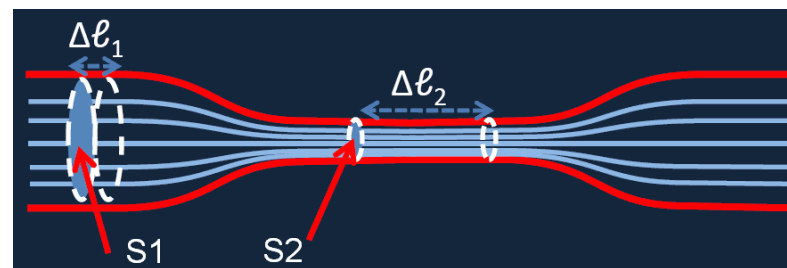
Deplasarea punctului lor de aplicație este respectiv $\Delta \ell_1 = v_1 \cdot \Delta t$ și $\Delta \ell_2 = v_2 \cdot \Delta t$, unde " v_i " este viteza fluidului prin secțiunea S_i , iar Δt este intervalul de timp (mic, infinitesimal) în care se face observația.

Lucrul mecanic efectuat asupra corpului fluid va fi:

$$\Delta L = (p_1 S_1 v_1 - p_2 S_2 v_2) \cdot \Delta t$$

Deplasarea staționară a fluidului prin conductă este echivalentă cu înlocuirea porțiunii $S_1 v_1 \cdot \Delta t$ cu porțiunea $S_2 v_2 \cdot \Delta t$ și de aceea variația de energie cinetică va fi:

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = (\rho S_2 v_2 \cdot \Delta t \cdot v_2^2 / 2 - \rho S_2 v_2 \cdot \Delta t \cdot v_1^2 / 2)$$



Ținând cont de faptul că $\Delta L = \Delta E_c$ (teorema variației energiei cinetice) și de ecuația de continuitate, $S_i v_i = \text{const.}$, obținem legea (teorema, ecuația) lui Bernoulli:

$$p_1 + \rho v_1^2 / 2 = p_2 + \rho v_2^2 / 2 \quad (4)$$

Conform **legii lui Bernoulli**, dedusă din teorema variației energiei cinetice, aici echivalentă cu conservarea energiei mecanice, este valabilă următoarea relație pentru curgerile orizontale:

$$p_t = p_s + p_d = \text{constantă} \quad (5)$$

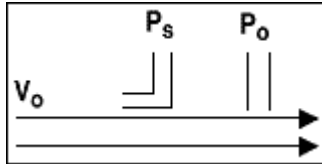
unde: p_t = presiunea totală;
 p_s = presiunea statică,
 p_d = presiunea dinamică.

Dacă curgerea are o deplasare de nivel (înălțime) atunci intervine și lucrul mecanic al forței de greutate (apare presiunea hidrostatică) și relația (5) devine:

$$p_t = p_s + \rho gh + \rho v^2/2 = \text{constantă} \quad (6)$$

Cu relația (5) rearanjată se poate determina viteza curgerii unui fluid, lucru util în multe aplicații:

$$v = [2 \cdot (p_t - p_s) / \rho]^{1/2} \quad (7)$$



Aranjament experimental folosit pentru măsurarea vitezei fluidului în mișcare (tub Pitot).

Tubul orientat spre direcția de curgere a fluidului măsoară presiunea totală și tubul vertical măsoară doar presiunea statică. Această abordare este folosită în aplicațiile din tehnica vidului și în aviație pentru a măsura viteza de curgere. Din viteza de curgere "v" se poate determina *debitul volumic* Q_v (volumul de fluid ce trece prin secțiunea transversală de arie "S" a unei conducte în unitatea de timp) din relația:

$$Q_v = V/\Delta t = S \cdot v \quad (8)$$

O problemă utilă (în cât timp se atinge viteza limită)

Un corp este acționat de o forță constantă (forța de greutate) $G=mg$ și o forță de frânare $F_r = kv^2$ proporțională cu pătratul vitezei. Găsiți legea vitezei și a spațiului.

R. Aplicăm legea forței:

$$ma = mg - kv^2 \quad \Rightarrow \quad a \cdot (m/k) = (mg/k) - v^2,$$

Viteza maximă (limită) se atinge când $a=0 \Rightarrow$

$$v^2 = mg/k$$

Notăm viteza maximă a corpului când $a=0$ cu v' :

$$mg/k = v'^2,$$

de unde:

$$(dv/dt) (m/k) = v'^2 - v^2 = (v' - v)(v' + v)$$

Separăm variabilele v și t :

$$\Rightarrow dv / [(v' - v)(v' + v)] = (k/m) \cdot dt$$

și ținând cont că :

$$1/[(v' - v)(v' + v)] = (1/2v') [1/(v' - v) + 1/(v' + v)]$$

putem scrie că:

$$dv/(v' - v) + dv/(v' + v) = dt (2v'k/m)$$

Introducem notația τ pentru *constantă de timp* caracteristică mișcării:

$$\tau = m/(2v'k) = (1/2) \cdot [m/(g \cdot k)]^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{gk}}$$

avem:

$$\int dv/(v' - v) + \int dv/(v' + v) = \int dt / \tau$$

După integrare cu condiția inițială $v = 0$ la $t = 0$, avem:

$$\ln[(v' - v)/(v' + v)] = -t/\tau$$

de unde exponențiind avem: $\Rightarrow (v' - v)/(v' + v) = e^{-t/\tau}$

Rearanjând obținem: $\Rightarrow v(t) = v' \cdot (1 - e^{-t/\tau}) / (1 + e^{-t/\tau})$

$$v(t) = v' \cdot \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{t}{\tau}}} = v' \cdot \frac{1 - e^{-t/\tau}}{1 + e^{-t/\tau}}$$

Numărătorul " $1 - e^{-t/\tau}$ " tinde la 1, plecând de la valoarea 0 pentru $t=0$, iar numitorul " $1 + e^{-t/\tau}$ " tinde la 1, plecând de la valoarea 2 pentru $t=0$. Calculăm valorile acestor termeni pentru câteva rapoarte dintre t și τ ($t/\tau=1,2,3,4$):

$$e^{-1} = 0,368 ; 1 - e^{-1} = 0,632 = 63 \% ; 1 + e^{-1} = 1,3678$$

$$e^{-2} = 0,135 ; 1 - e^{-2} = 0,864 = 86 \% ; 1 + e^{-2} = 1,135$$

$$e^{-3} = 0,049 ; 1 - e^{-3} = 0,950 = 95 \% ; 1 + e^{-3} = 1,049$$

$$e^{-4} = 0,018 ; 1 - e^{-4} = 0,982 = 98 \% ; 1 + e^{-4} = 1,018$$

Din aceste valori tragem concluzia că după 3 constante de timp τ , mobilul atinge practic viteza sa limită v' (cu o eroare de $\sim -5\%$), mișcându-se în continuare uniform.

Această forță de frânare este caracteristică mișcării obiectelor cu viteză mare într-un fluid, de exemplu pentru autovehicule și avioane mișcându-se în aer. Presiunea dinamică ce acționează asupra secțiunii mobilului, transversale pe direcția de curgere a fluidului:

$$p_{\text{din}} = \rho \cdot v^2 / 2$$

unde: ρ – densitatea fluidului, $1,21 \text{ kg/m}^3$ pentru aer la 20°C ,
 v – viteza relativă fluid-solid,
 crează forța de frânare:

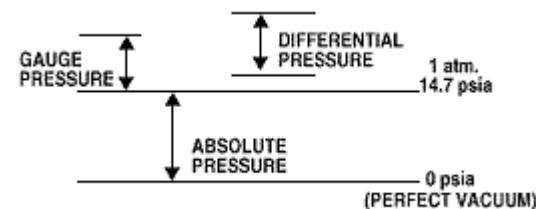
$$F_r = K \cdot S \cdot \rho \cdot v^2 / 2 \quad \Rightarrow k = K \cdot S \cdot \rho / 2$$

unde S este aria **secțiunii mobilului transversală** (perpendiculară) pe direcția de curgere, iar K este *coeficientul aerodinamic* ce depinde de forma obiectului:

$K = 1,2$	$\Rightarrow)$	semisferă concavă
$K = 1$	$\Rightarrow $	plan
$K = 0,4$	$\Rightarrow O$	sferă
$K = 0,3$	$\Rightarrow ($	semisferă convexă
$K = 0,2$	$\Rightarrow \angle$	"glonț"
$K = 0,04$	$\Rightarrow \subset$	"picătură", profilul aripei de avion

Măsurarea presiunii

- **Presiunea absolută** este măsurată față de vid. Un exemplu în acest sens îl constituie presiunea atmosferică.
- **Presiunea diferențială** este diferența de presiune dintre 2 puncte de măsură.
- **Presiunea relativă** este măsurată relativ la presiunea ambiantă. Tensiunea arterială este unul dintre exemple.



Același senzor de presiune poate fi utilizat pentru toate tipurile de măsurare a presiunii, diferind numai punctul de referință.

Cele 3 tipuri de măsurători sunt ilustrate în figura alăturată. Același senzor de presiune se poate utiliza în toate cele 3 moduri, diferind doar presiunea de referință. Presiunea diferențială poate fi măsurată în orice domeniu peste, sub sau în jurul presiunii atmosferice.

Alte unități de presiune

Presiunea este forța pe unitatea de suprafață, iar pentru ea s-au folosit multe tipuri de unități, după cât de potrivite cu aplicația erau. De exemplu tensiunea arterială este de regulă măsurată în mmHg (milimetri coloană de mercur), datorită faptului că inițial se utilizau manometrele cu mercur. Din aceleași motive presiunea atmosferică se exprimă de obicei în mmHg (=Torr) sau în in.Hg. Alte unități de măsură folosite pentru presiunea atmosferică sunt: bar-ul (=at. =atmosfera tehnică) și atm. (atmosfera fizică). Următoarele formule de transformare (conversii) ajută la înțelegerea diferitelor unități de măsură:

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 14,696 \text{ psi} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$$

$$1 \text{ at} = 1 \text{ kgf/cm}^2 = 1 \text{ bar} = 14,504 \text{ psi} = 0,981 \cdot 10^5 \text{ Pa (N/m}^2\text{)}$$

$$1 \text{ psi} = 51,714 \text{ mmHg} = 2,0359 \text{ in.Hg} = 27,680 \text{ in. H}_2\text{O} = 6,8946 \text{ kPa}$$

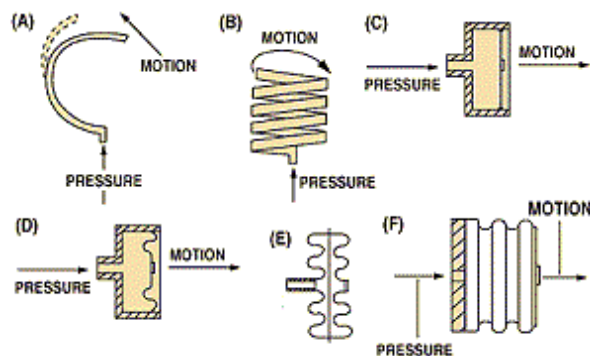
psia – presiunea absolută în livre pe tol (inci) pătrat
(**p**ounds **p**er **s**quare **i**nc**h**).

psid – presiunea diferențială în psi (**p**ounds **p**er **s**quare **i**nc**h**).

psig – presiunea relativă în livre pe tol pătrat.

Traductoare de presiune

Presiunea este sesizată cu elemente mecanice elastice: plăci, membrane și tuburi care sunt proiectate și construite să se deformeze când este aplicată presiunea. Acesta este mecanismul de bază care transformă presiunea în mișcare fizică. Această mișcare trebuie transformată pentru a obține o mărime de ieșire electrică sau de alt fel. În final este necesară prelucrarea semnalului în funcție de tipul senzorului și de aplicație, afișarea lui. Principalele tipuri de elemente sensibile la presiune sunt: tuburile Bourdon, diafragmele, capsulele și membranele (vezi figura alăturată).



Elementele de bază sesizoare de presiune pot fi configurate ca (A) tub Bourdon în formă de C; (B) tub Bourdon elicoidal; (C) diafragmă plată; (D) diafragmă gofrată; (E) capsulă sau (F) tub gofrat (silfon).

Tubul Bourdon este un tub sigilat, curbat, care se întinde sau strânge ca răspuns la presiunea aplicată. Toate, cu excepția diafragmelor, dau o deplasare destul de largă, care este folositoare în aparatele de măsurat mecanice și pentru senzorii electrici care cer o deplasare semnificativă.

La **aparatele mecanice de măsurare a presiunii** mișcarea creată de elementul sensibil este citită de un cadran sau indicator. Aceste procedee se folosesc de obicei în aplicații de performanță joasă, incluzând măsurarea tensiunii arteriale și aparatele de măsurat presiunea în automobile. Cuplajul mecanic al senzorului la sistemul de afișare poate introduce erori de repetabilitate. Masa elementelor mecanice în mișcare din aparatele de măsură limitează răspunsul în frecvență, acești senzori utilizându-se doar pentru măsurarea presiunilor care se schimbă lent.

Senzorii de presiune electromecanici transformă presiunea aplicată într-un semnal electric. Se folosesc materiale și tehnologii diverse în aceste procedee, pentru creșterea performanțelor, scăderea costului și compatibilizarea cu aplicația. Semnalul electric de la ieșire oferă multe posibilități de utilizare în aplicații diferite. Dezvoltarea extraordinară a tehnologiilor microelectronice a făcut posibil ca astăzi să avem senzori de presiune extrem de mici, cu performanțe deosebite și la un preț infim, față de cei mecanici.

Efectele dinamice. Presiunea statică este măsurată în condiții de echilibru sau în condiții staționare, dar în aplicațiile reale apar presiuni variabile în timp, dinamice. De exemplu la măsurarea tensiunii arteriale se obțin două valori staționare, presiunea sistolică și diastolică. O mare varietate de informații pot fi obținute din forma semnalului tensiunii arteriale în funcție de timp. Din acest motiv sunt folosite monitoarele de presiune sanguină în urgențele medicale.

Pentru a măsura presiuni variabile în timp, trebuie luat în considerare **răspunsul în frecvență** al senzorului. Aproximând grosier, răspunsul în frecvență al senzorului ar trebui să fie 5 – 10 mai mare decât componenta cu cea mai mare frecvență din semnalul presiunii.

Răspunsul de frecvență este definit ca fiind cea mai mare frecvență pe care senzorul o va măsura fără nici o distorsiune sau atenuare. Este util **timpul de răspuns** care într-un sistem de ordinul unu se află în următoarea relație cu frecvența de răspuns:

$$f_B = \pi \cdot \tau / 2$$

unde:

- f_B = frecvența unde răspunsul scade la jumătate (50 %);
- τ = constanta de timp, timpul în care mărimea de ieșire crește la 63% din valoare ei finală, când i se aplică un semnal treaptă al mărimii de intrare.

Alt aspect se referă la măsurarea de la distanță a presiunii, unde este utilizat un mediu lichid de legătură. Trebuie avut grijă ca tot aerul să fie evacuat (purjat), deoarece compresibilitatea lui va vicia forma de undă a semnalului.

Aplicații Industriale

Nivelul fluidului dintr-un recipient.

O joă de presiune poziționată să măsoare presiunea relativă la fundul unui recipient poate fi folosită pentru a indica la distanță nivelul fluidului din rezervor folosind relația:

$$h = P / (\rho \cdot g)$$

Debitul fluidului.

O diafragmă cu orificiu, plasată într-o secțiune a conductei, crează o cădere de presiune. Această metodă este des folosită pentru a măsura fluxul, deoarece căderea de presiune este mică în comparație cu alte tipuri de măsurare a fluxului și pentru că este imună la obturare, problemă ce deranjează măsurarea debitului unui mediu vâscos sau ce conține particule în suspensie. Relația utilizată este:

$$\text{Viteza de curgere} = v = [2 \cdot (P_{\text{total}} - P_{\text{static}}) / \rho]^{1/2}$$

În unele cazuri se măsoară presiuni diferențiale de câțiva centimetri coloană de apă la presiuni ale fluidului de sute de atmosfere. Acești senzori de presiune sunt astfel construiți pentru a nu se deteriora datorată presiunii de mod comun.

Aplicații ale măsurării presiunii la automobile

Există o mare varietate de aplicații ale măsurării presiunii în automobilele moderne controlate electronic.

Presiunea absolută la admisie

(Manifold Absolute Pressure MAP).

Multe sisteme de control al motorului folosesc pentru măsurarea fluxului masic de aer de la admisia în motor determinarea densității și vitezei aerului. Fluxul masic trebuie știut pentru a injecta cantitatea optimă de combustibil. MAP este utilizat în conjuncție cu temperatura aerului de la intrare pentru a calcula densitatea aerului. Este necesar un senzor de presiune în domeniul 15 psia sau mai mult (la motoare supraalimentate sau turboalimentate). Este de dorit includerea unei corecții de altitudine în sistemul de control care necesită măsurarea presiunii barometrice absolute (BAP). Unele sisteme folosesc un senzor separat, dar este mai simplu ca senzorul MAP să îndeplinească o funcție dublă de vreme ce el citește presiunea atmosferică în 2 condiții: înainte de a începe motorul să funcționeze și când clapeta de accelerație este larg deschisă.

Presiunea uleiului din motor.

Ungerea motorului necesită o presiune de 10-15 psig. Pompa de ulei este dimensionată să atingă această presiune la relanti, presiunea crescând odată cu turația motorului. O joă potențiometrică sau un întrerupător sensibil la presiune se folosește pentru această funcție, ne fiind necesară o precizie mare.

Detectarea scurgerilor prin evaporare din rezervorul de combustibil.

Rezervoarele moderne de combustibil, nu sunt ventilate (evacuate) în atmosferă pentru a reduce scurgerile și poluarea. Vaporii de benzină

din rezervorul de combustibil, rezultați din schimbările de presiune induse de schimbările de temperatură, sunt captați într-un absorbant din carbon și ulterior reciclați prin motor. Regulile guvernului american cer ca scurgerile în acest sistem să fie monitorizate de un sistem aflat la bord. O abordare constă în crearea unei suprapresiuni în sistem și măsurarea descreșterii presiunii într-un interval de timp fixat. Un senzor de 1 psig este folosit pentru această funcție.

Presiunea anvelopei.

Recenta descoperire a cauciucului "run-flat" a grăbit dezvoltarea sistemului de măsurare de la distanță a presiunii în anvelope. Motivul este că un cauciuc dezumflat de acest gen, este dificil de detectat vizual și distanța pe care poate fi folosit fără presiune este limitată.

Probleme de mecanica fluidelor ideale

Un parașutist cu masa $m=80\text{kg}$ se mișcă sub acțiunea gravitației ($g=9,81\text{ m/s}^2$) și a unei forțe rezistente proporțională cu pătratul vitezei $F_r=-k\cdot v^2$, $k=100\text{kg/m}$. Aflați:

- viteza maximă pe care o poate atinge;
- timpul după care atinge 90% din viteza maximă.

Calculați suprafața parașutei ($c_x=1$) ce limitează viteza de cădere la 2m/s , masei $m=13\text{kg}$ dacă frânează doar presiunea dinamică? ($g=9.8\text{ m/s}^2$, $\rho_{\text{aer}}=1.3\text{kg/m}^3$)

R.

$$mg = c_x S \rho v^2 / 2 \Rightarrow S = 2mg / (\rho v^2) = 2 \cdot 13 \cdot 10 / (1.3 \cdot 2^2) = 50\text{ m}^2.$$

Automobilul cu coeficientul aerodinamic $c_x=0.3$ și dimensiunile $H=1.51\text{ m}$, $\ell=2\text{ m}$, $L=3\text{ m}$, e frânat doar de presiunea dinamică a aerului ($\rho_{\text{aer}}=1.3\text{kg/m}^3$). Ce putere dă motorul la viteza maximă $v=180\text{ km/h}$? (W și CP)

R

$$F_t = P/v \quad F_r = c_x \cdot H \ell \cdot \rho v^2 / 2 \quad \text{la } v_{\text{max}} \quad v = \text{const.} \Rightarrow \sum F = 0 \Rightarrow F_t = F_r \Rightarrow P = Fv = c_x H \ell \rho v^3 / 2 = 0.3 \cdot 2 \cdot 1.51 \cdot 1.3 \cdot 50^3 / 2 = 73'612.5\text{ W} = 100\text{CP}$$

Un automobil are masa $m = 1\,000\text{ kg}$, dimensiunile $H=1\text{m}$, $\ell=2\text{m}$, $L=4\text{m}$, puterea motorului $P=100\text{CP}$ ($1\text{CP}=736\text{W}$), viteza maximă pe drum orizontal $v=216$ (144) km/h . Considerând că frânează mișcarea doar forța aerodinamică (densitatea aerului $d=1,3\text{ kg/m}^3$), aflați:

- forța de tracțiune la viteza maximă;
- coeficientul aerodinamic al automobilului;
- forța de rezistență aerodinamică la 72 km/h ;
- în cât timp atinge viteza de 108 km/h fără frecări, pornind din repaus și utilizând puterea maximă.
- în condițiile de la punctul d calculați viteza la momentele $t=0, 1, 2, 4, 9\text{ s}$ și reprezentați grafic viteza în funcție de timp.

Rezolvare

$$v_{\text{max}} = 144 \text{ sau } 216\text{ km/h} = 40 \text{ sau } 60\text{m/s}$$

$$a) F_t = P/v = 100 \cdot 736 / 40 = 1840\text{N}$$

$$a) F_t = P/v = 100 \cdot 736 / 60 = 1227\text{N}$$

$$F_t = F_r \text{ și } F_r = c_x H \ell \cdot \rho v^2 / 2 \Rightarrow$$

$$b) c_x = 2F_t / (H \ell \rho v^2) = 2 \cdot 1840 / (2 \cdot 1 \cdot 1,3 \cdot 40^2) = 0,885$$

$$b) c_x = 2F_t / (H \ell \rho v^2) = 2 \cdot 1227 / (2 \cdot 1 \cdot 1,3 \cdot 60^2) = 0,262$$

$$F_2/F_1 = v_1^2/v_2^2 \Rightarrow$$

$$c) F_2 = F_1 v_1^2 / v_2^2 = 1840 \cdot (20/40)^2 = 460\text{ N}$$

$$c) F_2 = F_1 v_1^2 / v_2^2 = 1227 \cdot (20/60)^2 = 136\text{ N}$$

$$d) Pt = mv^2/2 \Rightarrow t = mv^2 / (2P) = 1000 \cdot (30)^2 / (2 \cdot 100 \cdot 736) = 6,11\text{s}$$

$$e) v = (2Pt/m)^{1/2} = (2P/m)^{1/2} \cdot t^{1/2} = 12,1 \cdot t^{1/2}$$

0; 12,1; 17,1; 24,3; 36,4;

Un automobil are masa $m = 1\,000\text{ kg}$, dimensiunile $H=1\text{ m}$, $\ell=2\text{ m}$, $L=4\text{ m}$, puterea motorului $P=100\text{ CP}$, viteza maximă pe drum orizontal $v=144\text{ km/h}$ ($1\text{ CP}=736\text{ W}$). Considerând că frânează mișcarea doar forța aerodinamică (densitatea aerului $d=1,3\text{ kg/m}^3$), aflați:

- a) coeficientul aerodinamic al automobilului;
- b) puterea consumată și lucrul mecanic efectuat de forța aerodinamică asupra automobilului la viteza de 72 km/h pe distanța de 108 km ;
- c) același lucru dacă viteza este de 144 km/h ;
- d) în cât timp atinge viteza de 108 km/h fără frecări, pornind din repaus.

FLUIDE VÂSCOASE

Vâscozitatea unui fluid este dată de frecarea dintre straturile de fluid. Cel mai corect spus este vorba de *transferul de impuls* de la un strat la altul *transversal* (perpendicular) pe strat. Imaginea care ne ajută este cea a unui top de hârtie din care extragem o foaie de hârtie. Foaia extrasă antrenează foaile adiacente care le antrenează pe următoarele și așa mai departe.

Forța de rezistență datorită vâscozității e proporțională cu suprafața de contact dintre cele două straturi, S , și cu gradientul vitezei (cât de rapid se modifică viteza de la un strat la altul), dv/dr . Relația care descrie fenomenul este:

$$F_r = \eta \cdot S \cdot dv/dr \quad (1)$$

unde η este *coeficientul de vâscozitate dinamică* al fluidului:

$$[\eta]_{SI} = N \cdot s / m^2 = kg / (m \cdot s) \quad (2)$$

$\eta_{aer} = 1,81 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 20°C și $2,18 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 100°C
(vâscozitatea gazelor crește ușor cu creșterea temperaturii)

$\eta_{apa} = 1,002 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 20°C și $0,283 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 100°C

$\eta_{ulei} = 9,8 \cdot 10^{-1} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 20°C și $1,7 \cdot 10^{-2} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 100°C

$\eta_{glicerina} = 2,33 \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$ la 25°C

(vâscozitatea lichidelor scade mult cu creșterea temperaturii).

Curgerea Poiseuille

Curgerea Poiseuille. Avem un tub de rază R și lungime L . Forța de frecare internă pe suprafața cilindrului de rază r este:

$$F_i = \eta \cdot S \cdot dv/dr = \eta \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dv/dr \quad (3)$$

Diferența de presiune dintre capetele tubului crează forța ce învinge forța de frecare:

$$\pi \cdot r^2 \cdot \Delta p = -\eta \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L \cdot dv/dr \quad (4)$$

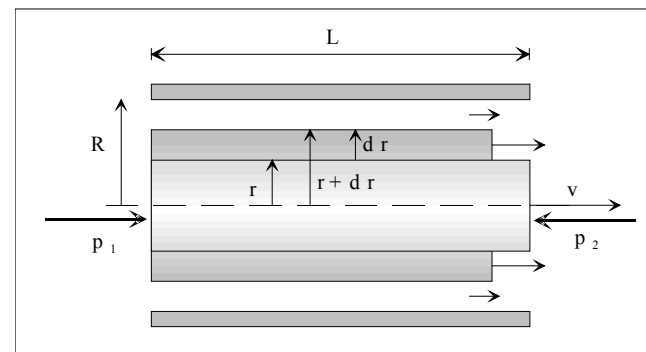


Figura 1. Curgerea laminară în conducte (curgere Poiseuille).

care după separarea variabilelor și integrare devine:

$$v(r) = (R^2 - r^2) \cdot \Delta p / (4 \cdot \eta \cdot L) = v_{max} \cdot (1 - r^2/R^2) \quad (5)$$

$$v_{max} = R^2 \cdot \Delta p / (4 \cdot \eta \cdot L) \quad (6)$$

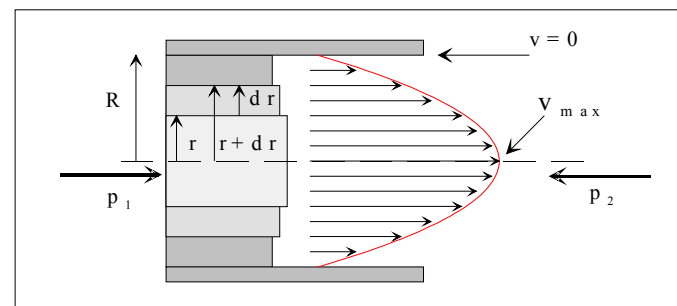


Figura 2. Distribuția vitezelor straturilor de fluid în tubul capilar.

Viteza este maximă în centrul tubului ($r=0$) și scade la zero după o lege parabolică către pereții tubului ($r=R$).

Debitul volumic ($Q=Sv$) va fi dat de **legea Hagen și Poiseuille**:

$$Q = \int v \, dS = \int v_{\max} (1 - r^2/R^2) 2\pi r \, dr = \pi R^4 \Delta p / (8\eta L) \quad (7)$$

Se poate defini o "rezistență fluidică" a conductei, similar cu ce avem în electricitate, ca raportul dintre tensiune, aici căderea de presiune Δp , și curent, aici debitul Q :

$$R_f = \Delta p / Q = 8\eta L / (\pi R^4) \quad (8)$$

Rezistența la curgere este proporțională cu raza conductei la puterea "-4". Adică o dublare a razei va micșora rezistența de 16 ori!

Legea lui Stokes

Un fluid, **datorită vâscozității**, exercită asupra unui corp în mișcare o forță de frânare (rezistență la înaintare) dată de **legea lui Stokes**:

$$F_v = 3 \cdot \pi^{1/2} \cdot S^{1/2} \cdot \eta \cdot v \quad (9)$$

unde S este *suprafața corpului spălată de fluid*. Pentru o sferă în mișcare în fluid vâscos, fiindcă $S=4\pi r^2$, relația devine mai simplă:

$$F_v = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (10)$$

O sferă din puf va fi mai puternic frânată decât o sferă netedă de aceeași dimensiune geometrică, fiindcă firele fine din puf vor crea o suprafață mult mai mare decât suprafața geometrică.

Datorită presiunii dinamice a fluidului $p_{\text{dinam}} = \rho \cdot v^2 / 2$ asupra unui corp care se deplasează în fluid acționează forța de rezistență dinamică:

$$F_d = C_d \cdot S \cdot \rho \cdot v^2 / 2 \quad (11)$$

unde ρ este densitatea fluidului, iar C_d este *coeficientul aerodinamic* (un număr, este adimensional), tabelat mai jos pentru câteva situații tipice.

Corpul din fluid	Proporția	$\Re$	C_d
Placă dreptunghiulară (a, b)	a/b=	1	1,16
		8	1,23
		25	1,57
		50	1,76
		∞	2,00
Cilindru	L/d=	1	0,91
		2	0,85
		4	0,87
		7	0,99
Disc circular $\Rightarrow $			1,11
Semisferă convexă $\Rightarrow ($			0,41
Semisferă concavă $\Rightarrow)$			1,35
Con plin $\Rightarrow \blacktriangleleft$	$\alpha=$	60°	0,51
		30°	0,34

Forța de rezistență totală din partea fluidului va fi:

$$F_r = F_{\text{visc}} + F_{\text{din}} = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v + C_d \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot v^2 / 2 \quad (12)$$

Raportul $F_{\text{din}} / F_{\text{visc}}$ ne spune ce forțe contează în situația dată și conține un număr adimensional, **numărul Reynolds**:

$$Re = \rho \cdot v \cdot r / \eta \quad (13)$$

Valoarea numărului Reynolds determină tipul de curgere a fluidului pe lângă corpurile imersate în fluid sau prin conducte. În general curgerea este laminară la valori ale numărului Reynolds $Re < 100$, iar pentru $Re > 1000$ curgerea este turbulentă.

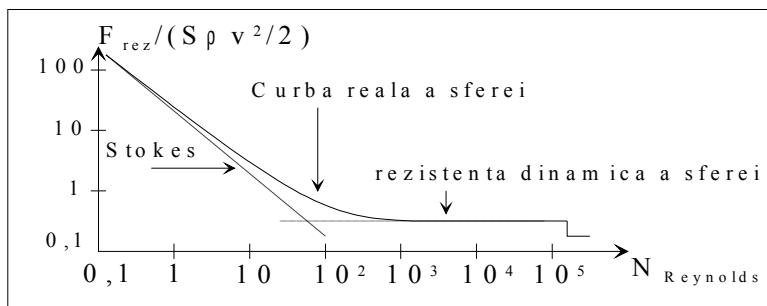


Figura 3. Forța de rezistență exercitată asupra unei sfere ce se mișcă într-un fluid în funcție de numărul Reynolds.

O problemă utilă (în cât timp se atinge viteza limită)

Un corp este acționat de o forță constantă (forța de greutate) $G=mg$ și o forță de frânare $F_r = kv$ proporțională cu viteza. Găsiți legea vitezei și a spațiului.

R. Aplicăm legea forței :

$$ma = mg - kv \Rightarrow dv/dt = g - v \cdot k/m = (k/m)[(mg/k) - v]$$

Viteza maximă (limită) se atinge când $a=0 \Rightarrow v'=mg/k$

Notăm $\tau=m/k$. Separăm variabilele v și t și integram:

$$\int dv/(v'-v) = \int \tau \cdot dt \Rightarrow -\ln(v'-v) + \ln C = t/\tau$$

Punând condiția inițială $v = 0$ la $t = 0$, avem $\ln C = \ln(mg/k)$ și exponențiind avem:

$$v(t) = v' \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

Știind că :

$e^{-1} = 0,3678$;	$1 - e^{-1} = 0,632 = 63\%$
$e^{-2} = 0,135$;	$1 - e^{-2} = 0,864 = 86\%$
$e^{-3} = 0,0498$;	$1 - e^{-3} = 0,950 = 95\%$
$e^{-4} = 0,018$;	$1 - e^{-4} = 0,982 = 98\%$

tragem concluzia că după 3 constante de timp τ , mobilul atinge practic viteza sa limită v' , mișcându-se în continuare uniform.

Frânarea proporțională cu viteza e caracteristică mișcării corpurilor cu viteză mică în fluide vâscoase. Forța de frânare a unei sfere de rază r și densitate ρ , care se mișcă cu viteza v , într-un fluid de densitate ρ' și coeficient de vâscozitate η ($[\eta]_{SI} = \text{kg}/(\text{s} \cdot \text{m}) = \text{Ns}/\text{m}^2$) este:

$$f = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (\text{legea lui Stokes})$$

La limită, când sfera se mișcă uniform sub acțiunea forței de greutate, a forței arhimedice orientată în sens contrar greutății și a forței de frânare, avem egalitatea:

$$6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v' = (4/3) \pi r^3 g (\rho - \rho')$$

din care putem deduce coeficientul de vâscozitate η măsurând viteza limită v' :

$$\eta = 2g(\rho - \rho')r^2 / (9v')$$

Exemple numerice.

1) Care este viteza limită a unei picături de ploaie (apă) $r=1\text{mm}$ sau $0,001\text{mm}$? ($\rho_{\text{aer}}=1,3 \text{ kg}/\text{m}^3$, $\eta_{\text{aer}}=1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$)

- Care este viteza limită datorită forței de rezistență vâscoasă?
- Care este viteza limită datorită forței de rezistență dinamică?
- Cine determină viteza limită a picăturilor de ploaie, rezistența dinamică sau vâscozitatea? Cât este numărul Reynolds?
- În cât timp și pe ce distanță se atinge viteza limită?
- Dar în cazul grindinei cu $r=2\text{mm}$?

2) Ce viteză limită are bila de rulment, $\rho_{\text{fier}}=7870 \text{ kg}/\text{m}^3$, $r=2\text{mm}$, în ulei cu densitatea $\rho_{\text{ulei}}=0,9 \text{ g}/\text{cm}^3$ și vâscozitatea $\eta_{\text{ulei}}=0,9 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ sau în apă cu $\rho_{\text{apa}}=1000 \text{ kg}/\text{m}^3$, $\eta_{\text{apa}}=1,8 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$. Estimați timpul și distanța pe care se atinge v_{lim} . Cât este numărul Reynolds?

3) Un om suportă o cădere liberă de la 2m. Ce diametru trebuie să aibe cupola parașutei ca omul cu $m=100\text{kg}$ să aibe în aer viteză limită a căderii libere de la 2m? Considerați atât cazul frânării vâscoase cât și cel al frânării dinamice. Se cunosc $\rho_{\text{aer}}=1,3\text{ kg/m}^3$, $\eta_{\text{aer}}=1,8\cdot 10^{-5}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$, $C_d=1$, $g=10\text{m/s}^2$. În cât timp și pe ce distanță se atinge viteză limită?

4) Cunosând că pentru o conductă cilindrică numărul $Re=2200$ separă curgerea laminară de cea turbulentă, aflați viteză corespunzătoare acestui număr pentru raze ale conductei de $r_1 = 1\text{mm}$ și $r_2 = 1\text{cm}$. (apă și aer).

$$\eta_{\text{aer}} = 1,8\cdot 10^{-5}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}, \rho_{\text{aer}}=1,3\text{ kg/m}^3;$$

$$\eta_{\text{apa}} = 1\cdot 10^{-3}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}, \rho_{\text{apa}}= 1000\text{ kg/m}^3.$$

a) Ce cădere de presiune apare pe o conductă de aer comprimat cu lungimea 1km și diametrul 2cm la un debit de $1\text{m}^3/\text{min}$.? Dar pentru apă?

5) Ce putere consumă forța aerodinamică ce acționează asupra automobilului cu masa $m = 1\,000\text{ kg}$, dimensiunile $H=1,5\text{m}$, $l=2\text{m}$, $L=4\text{m}$ și coeficientul aerodinamic $C=0,4$, la viteza de 18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144 km/h? Faceți graficul puterii "P" în funcție de viteză "v". ($\rho_{\text{aer}} = 1,2\text{ kg/m}^3$)

Probleme de mecanica fluidelor vâscoase

1.

Un parașutist cu masa 80kg se mișcă sub acțiunea greutatei ($g=9,81\text{ m/s}^2$) și a unei forțe rezistente proporțională cu viteza: $F_r = -k\cdot v$, $k = 100\text{ N}\cdot\text{s/m}$ (kg/s). Aflați:

- viteza maximă pe care o poate atinge;
- timpul după care atinge 90% din viteză maximă.

2.

O seringă cu volumul de 50 ml are un ac cu diametrul interior $d=0,2\text{ mm}$ și lungimea $L=5\text{ cm}$ și diametrul pistonului $D=2\text{ cm}$. Știind că se

apasă asupra pistonului cu forța $F=30\text{N}$, coeficientul de vâscozitate $\eta_{\text{aer}}=1,8\cdot 10^{-5}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ și densitatea $\rho_{\text{aer}}=1,3\text{ kg/m}^3$, aflați:

- căderea de presiune pe ac (diferența de presiune între capete);
- denivelarea Δh a coloanei de apă a unui manometru cu tub în formă de "U" legat între capetele acului [$\rho_{\text{apa}}=1000\text{ kg/m}^3$, $g=9,81\text{ m/s}^2$];
- în cât timp se golește seringă;
- în cât timp se golește seringă umplută cu apă [$\eta_{\text{apa}}=1\cdot 10^{-3}\text{ Ns/m}^2$];
- viteza cu care iese jetul de apă din ac.

3.

O conductă cilindrică cu raza interioară $r=1\text{cm}$ și lungimea $L=1\text{km}$ este parcursă de debitul de aer $D=1\text{m}^3/\text{minut}$. Știind coeficientul de vâscozitate $\eta_{\text{aer}}=1,8\cdot 10^{-5}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ și densitatea $\rho_{\text{aer}}=1,2\text{ kg/m}^3$, aflați:

- diferența de presiune dintre capetele conductei;
- denivelarea Δh a coloanei de apă a unui manometru cu tub în formă de "U" legat între capetele conductei [$\rho_{\text{apa}}=1000\text{ kg/m}^3$];
- căderea de presiune dacă conducta ar fi parcursă de apă. [$g=9,81\text{ m/s}^2$. $\eta_{\text{apa}}=1\cdot 10^{-3}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$]

4.

O seringă cu volumul de 50 ml are un ac cu diametrul interior $d=1\text{ mm}$ și lungimea $L=5\text{ cm}$ și diametrul pistonului $D=2\text{ cm}$. Știind coeficientul de vâscozitate $\eta_{\text{apa}}=1\cdot 10^{-3}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$, densitatea $\rho_{\text{apa}}=10^3\text{ kg/m}^3$ și că se apasă asupra pistonului cu forța $F=31,4\text{ N}$, aflați:

- presiunea din seringă;
- denivelarea Δh a coloanei de apă a unui manometru cu tub în formă de "U" legat între seringă și atmosferă [$g=9,81\text{ m/s}^2$];
- debitul cu care iese apa din seringă în m^3/s și ml/s ;
- în cât timp se golește seringă.

R.

$$\text{a) } p=F/S=31,4/(3,14\cdot 10^{-4})=10^5\text{ Pa}$$

$$\text{b) } h=p/(\rho_{\text{apa}}\cdot g)=10^5/(10^3\cdot 9,81)=10,2\text{m}$$

$$\text{c) } Q=\pi R^4 p/(8\eta L)=3,14\cdot 5^4\cdot 10^{-4}\cdot 10^5/(8\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{-2})=4,91\cdot 10^{-5}\text{ m}^3/\text{s}$$

$$=49,1\text{ml/s}$$

$$d) t=V/Q = 1,02\text{s}$$

5.

În cât timp se va limpezi apa tulbure cu adâncimea de $h=1\text{m}$ în care se află în suspensie particule de praf cu densitatea $\rho=3000\text{kg/m}^3$ și diametrul $D=0.2\text{mm}$, dacă frânează doar forța de vâscozitate? ($\eta_{\text{apa}}=1\cdot 10^{-3}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$, $g=10\text{m/s}^2$)

Rezolvare

$$r=D/2=0,1\text{mm}=10^{-4}\text{m}$$

$$G-F_A=F_v \Rightarrow (4\pi r^3/3)(\rho-\rho_{\text{apa}})g=6\pi\eta r v \Rightarrow$$

$$v=2gr^2(\rho-\rho_{\text{apa}})/(9\eta)=2\cdot 10\cdot 10^{-8}\cdot (3000-1000)/(9\cdot 10^{-3})=4.44\cdot 10^{-2}\text{ m/s}$$

$$t=h/v=1/4.44\cdot 10^{-2}=22,5\text{ s}$$

6.

O seringă cu 20 ml de apă, cu diametrul pistonului $D=1\text{ cm}$, are un ac cu diametrul interior $d=0.2\text{ mm}$ și lungimea $L=3\text{ cm}$. Știm densitatea $\rho_{\text{apa}}=1000\text{kg/m}^3$ și vâscozitatea apei $\eta_{\text{apa}}=1\cdot 10^{-3}\text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$. Aflați:

a. forța ce acționează asupra pistonului pentru a o goli în 10 secunde;

b. viteza cu care iese apa din ac (m/s și km/h).

Rezolvare

$$r=d/2=0,1\text{mm}=10^{-4}\text{m}, R=D/2=0,5\text{cm}=5\cdot 10^{-3}\text{m}, V=20\text{ml}=20\cdot 10^{-6}\text{ m}^3.$$

$$a. Q_v=V/t=\pi r^4 p/(8\eta L) \Rightarrow$$

$$p=8\eta LV/(t\pi r^4)=8\cdot 10^{-3}\cdot 3\cdot 10^{-2}\cdot 20\cdot 10^{-6}/(10\cdot 3.14\cdot 10^{-16})=1,53\cdot 10^6\text{ Pa}$$

$$F=pS=\pi R^2\cdot p=3.14\cdot 25\cdot 10^{-6}\cdot 1,53\cdot 10^6=120\text{ N} \quad \text{sau}$$

$$F=pS=R^2\cdot 8\eta LV/(tr^4)=$$

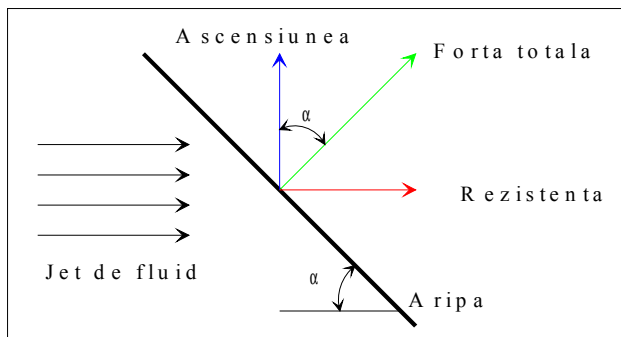
$$=25\cdot 10^{-6}\cdot 8\cdot 10^{-3}\cdot 3\cdot 10^{-2}\cdot 20\cdot 10^{-6}/(10\cdot 10^{-16})=1.2\cdot 10^2\text{ N}$$

$$b. Q_v=V/t=Sv=\pi r^2\cdot v \Rightarrow$$

$$v=V/(t\pi r^2)=20\cdot 10^{-6}/(10\cdot 3.14\cdot 10^{-8})=63.7\text{ m/s}=229\text{ km/h}$$

ARIPA DE AVION

Un plan face unghiul α cu orizontala. Asupra sa acționează un curent de aer cu viteza v . Pentru ce unghi este maximă forța verticală de ascensiune? Ce suprafață are o aripă care susține o masă $M=100$ kg la viteza orizontală de 36 km/h (10m/s) pentru un unghi optim?



Un jet de fluid generează o forță perpendiculară pe suprafața care i se opune. Această forță are o componentă ascensională (verticală) și o componentă de frânare (orizontală).

Explicație folosind presiunea dinamică.

Perpendicular pe direcția de curgere a aerului se "vede" suprafața:

$$S = A \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

iar forța dinamică creată de curgerea aerului va fi perpendiculară pe suprafața, având expresia

$$F_d = A \sin \alpha \cdot \rho v^2 / 2 \quad (2)$$

Componenta verticală a forței dinamice, cea care ridică, forța de sustentare (lift) sau forța de ascensiune (portanța) se obține prin descompunerea forței dinamice după cele 2 direcții conform figurii și este:

$$F_v = F_d \cos \alpha = A \sin \alpha \cos \alpha \cdot \rho v^2 / 2 \quad (2)$$

sau

$$F_v = [\sin(2\alpha)/2] [A \cdot \rho v^2 / 2] \quad (3)$$

Din această relație se găsește că valoarea maximă a sustentăției este la unghiul $\alpha=45^\circ$ când $\sin(2\alpha)=1$.

Pentru a ridica o masă M este necesar ca forța portantă să egaleze greutatea:

$$Mg = A \cdot \rho v^2 \cdot \sin(2\alpha) / 4 \quad (4)$$

De aici găsim aria necesară ca fiind:

$$A = 4Mg / [\rho v^2 \cdot \sin(2\alpha)] \quad (5)$$

Numeric:

$$A = 4 \cdot 100 \cdot 10 / [1,2 \cdot 10^2] = 100/3 = 33,3 \text{ m}^2$$

Componenta orizontală a forței dinamice crează o forță de rezistență, (*drag* în engleză):

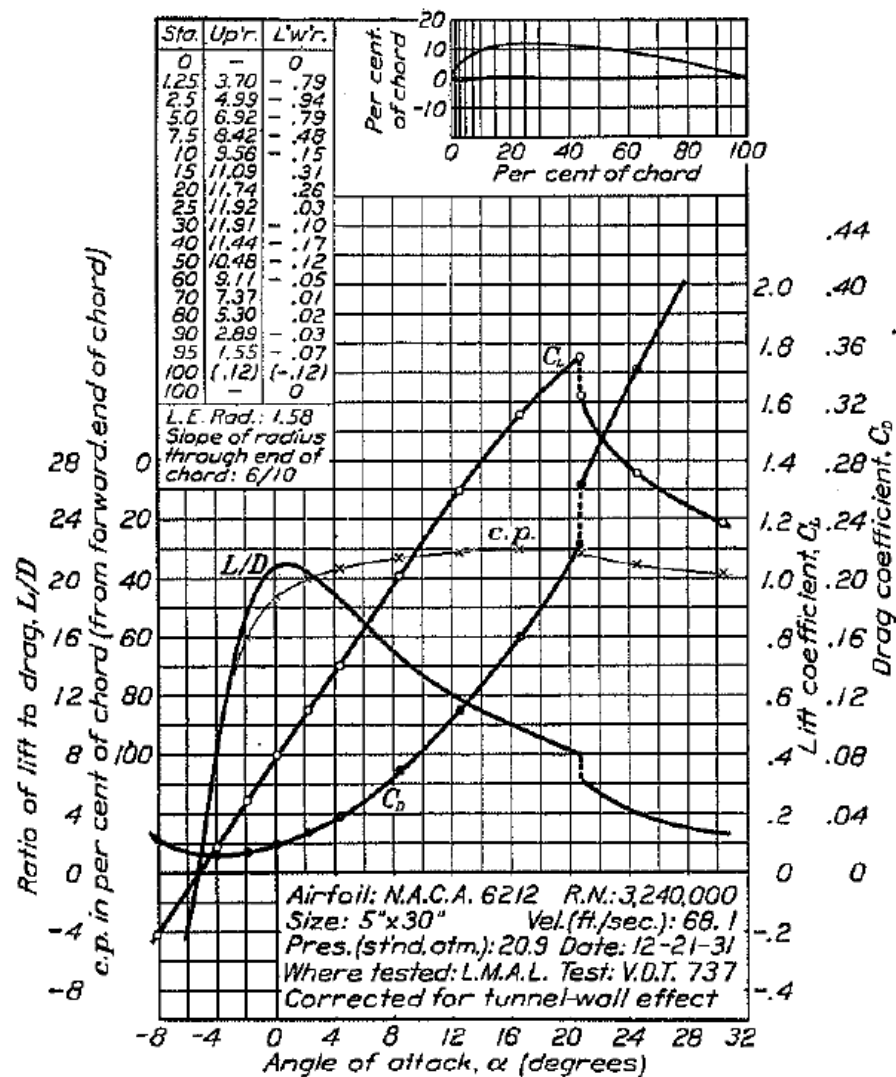
$$F_r = F_o = F_d \sin \alpha = A \cdot \sin^2 \alpha \cdot \rho v^2 / 2 \quad (6)$$

În literatura de specialitate sustentăția și rezistența unui anumit profil de aripă (*airfoil* în engleză) se caracterizează prin **coeficientul de sustentăție** (*lift coefficient*) C_L și **coeficientul de rezistență** (*drag coefficient*) definite ca:

$$C_L = F_L / [A \cdot \rho v^2 / 2] \quad \text{uzual } \sim 1.5 \text{ la } 15^\circ \quad (7)$$

$$C_D = F_D / [A \cdot \rho v^2 / 2] \quad \sim 0.01 \text{ la } 0^\circ \text{ unghi de atac} \quad (8)$$

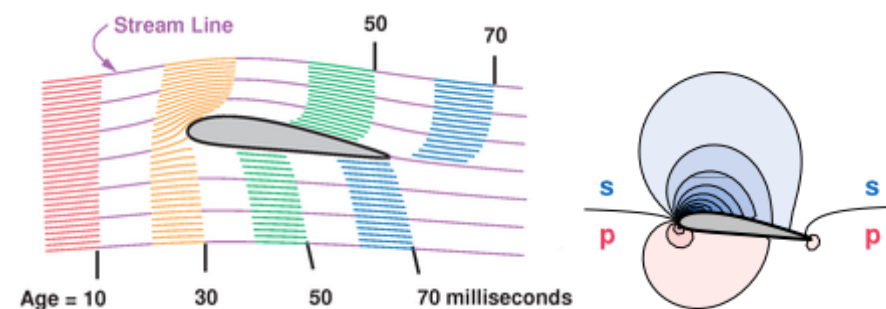
unde A este aria aripii (proiecția în plan orizontal). Din relația (3) $C_L=1/2$ la 45° , iar din măsurători experimentale ~ 1.5 la 15° .



DE CE apare această discrepanță între experiment și teorie?

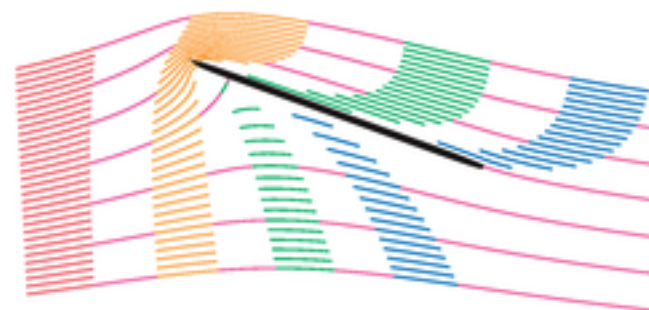
Explicație folosind legea lui Bernoulli.

Forma profilului de aripă determină aerul să circule cu viteză mare în partea de sus a aripii și cu o viteză mai mică în partea de jos a aripii. Din această cauză, conform principiului lui Bernoulli, în partea de sus a aripii avem o presiune statică mai mică decât cea din partea de jos a aripii, ceea ce va genera o forță de sustentație, o forță verticală orientată în sus.



Sursa: <http://www.av8n.com/how/htm/airfoils.html>

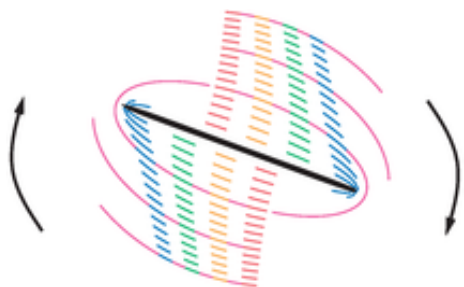
Chiar și o simplă placă, neprofilată, este capabilă să genereze acest fenomen, conform figurii alăturate. Liniile colorate arată evoluția în timp a porțiunilor de aer marcate periodic cu fum (aerosoli).



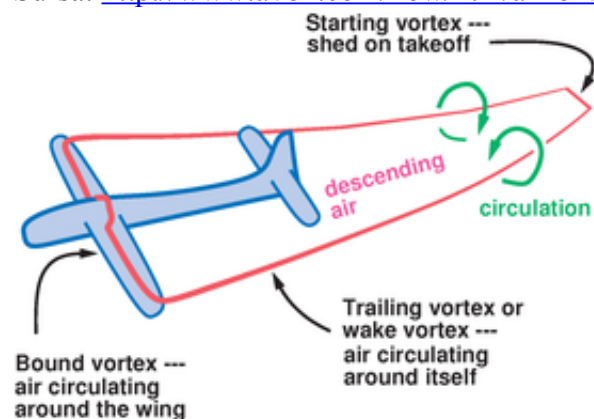
Sursa: <http://www.av8n.com/how/htm/airfoils.html>

Mișcarea aerului pe lângă aripă poate fi modelată ca suprapunerea a două mișcări, una de translație (viteza de deplasare a aerului) și una

circulară, un vârtej, un vortex în jurul aripii (vezi figura) dependent de unghiul de atac, unghiul dintre suprafața aripii și orizontala.



Sursa: <http://www.av8n.com/how/htm/airfoils.html>



Explicație folosind schimbarea direcției aerului.

Aerul ce trece pe lângă aripă este deflectat (dirijat) în jos de forma pe care o are aripa. Efectul schimbării de direcție de curgere a aerului este o schimbare de direcție de deplasare a aripii. Conform legii a treia a lui Newton, legea acțiunii și reacțiunii, dacă aripa acționează cu o forță îndreptată în jos asupra aerului, atunci aerul acționează cu o forță egală și de sens contrar, îndreptată în sus, asupra aripii:

$$F = dp/dt = v \, dm/dt = v \rho v S = S \rho v^2. \text{ [const. multiplicativă]}$$

Pentru o deducere mai riguroasă vezi:

www.onemetre.net/design/downwash/Momentum/Momentum.htm

Cantitatea de aer care-și modifică direcția este uriașă, fiindcă este afectat aerul pe o distanță verticală egală cu anvergura (lungimea) aripilor (vezi figurile alăturate unde apar și vârtejurile).



Procesul care produce sustentarea este unul singur.

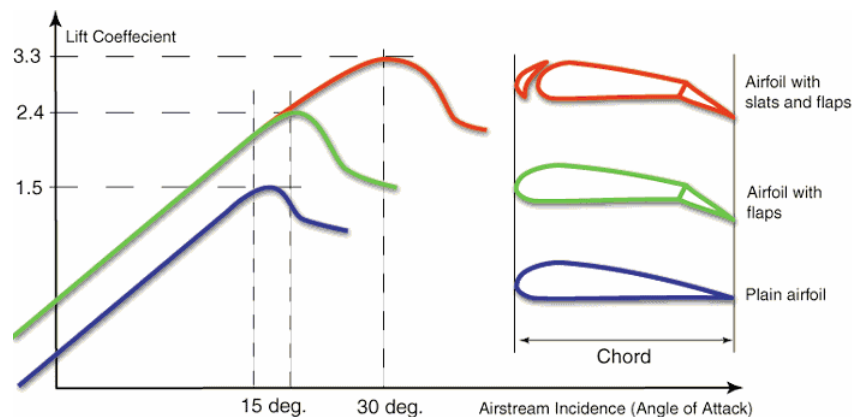
Fiecare explicație pusă în evidență mai sus s-a concentrat doar pe un singur aspect al procesului care produce forța de sustentare. Aripa produce o circulație, un vârtej, proporțional cu unghiul de atac și cu viteza aerului. Acestă circulație ne spune că aerul de deasupra aripii se mișcă mai repede decât cel de dedesubt. Acest fenomen produce o presiune joasă deasupra aripii, conform cu principiul lui Bernoulli. Acestă presiune joasă trage în sus aripa și împinge în jos aerul în acord cu legea a 3-a a lui Newton, legea acțiunii și reacțiunii.

Fenomenul sustentăției este descris de *teorema lui Kutta și Jukovski (Kutta-Zhukovsky theorem)*

$$F_{\text{ridicare}} = \text{viteza aer} \times \text{circulație} \times \text{densitate aer} \times \text{anvergură} \quad (9)$$

unde "circulația" este proporțională cu produsul dintre viteza aerului și coeficientul de sustentare (proporțional cu unghiul de atac).

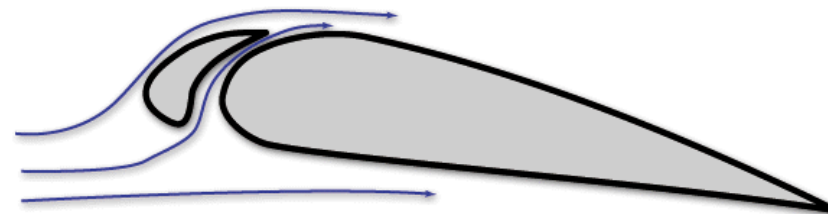
Mărirea coeficientului de sustentare



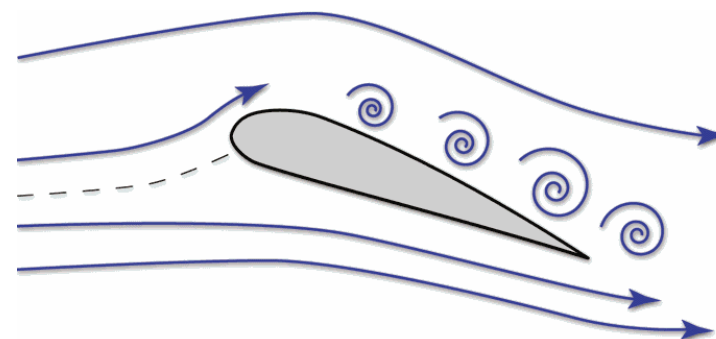
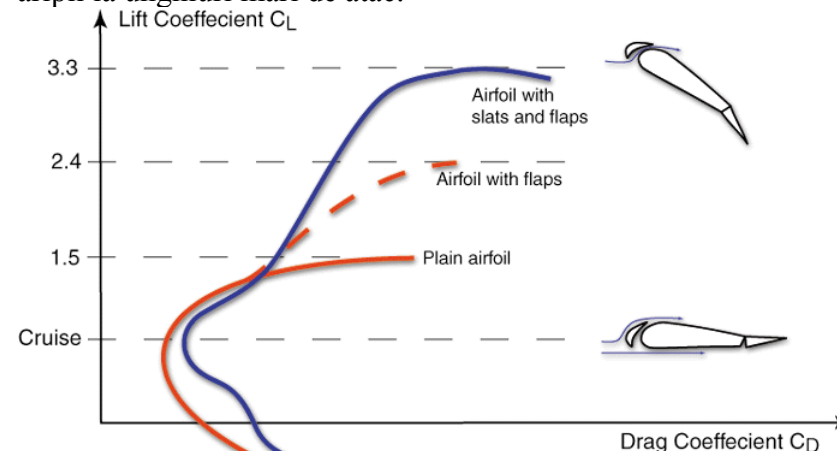
Coeficientul de sustentare în funcție de unghiul de atac.

Sursa: <http://www.zenithair.com/stolch801/design/design.html>

O forță de sustentare mai mare a aripii se obține cu *flaps*-uri în coada aripii sau/și cu prize de aer (*slats*-uri) la bordul de atac al aripii.



Priza de aer (*slats*) la bordul de atac al aripii îmbunătățește portanța aripii la unghiuri mari de atac.



Pierderea de portanță a aripii la unghiuri mari de atac se datorează desprinderii de suprafața superioară a aripii a stratului de aer limită și formării de vârtejuri.

Un avion ultra-uşor (352 kg) Zenith STOL CH 750 cu astfel de aripi cu portanţă mare (9 m anvergură) duce sarcina utilă de 247 kg cu o viteză de 170 km/h (105 mph) folosind un motor cu puterea de 105 CP, având nevoie de circa 30 m pentru decolare sau aterizare.

Sursa: <http://www.zenithair.com/stolch750/data/750-flyer-2page.pdf>